Список задач (домашние задания)

В задачах используются обозначения из лекций. В частности, $X = \{1, \ldots, L\}$ обозначает множество состояний марковской цепи. МЦ = марковская цепь, а МПВ = матрица переходных вероятностей.

Задачи ко второй лекции (04.10.2019) [1]:

1. Пусть последовательность случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_T$ образует МЦ с переходными вероятностями $p_n(i,j)$. Докажите, что $\mathbb{P}(\xi_k = a | \xi_{k-1} = b) = p_k(b,a)$, для всех $1 \le k \le T$ и $a, b \in X$, таких что $\mathbb{P}(\xi_{k-1} = b) > 0$.

2. Докажите утверждение 2 из лекций: пусть случайные величины $\xi_0, \ldots, \xi_T$ образуют МЦ. Докажите, что для всех $1 \le k \le T$ и $i_0, \ldots, i_k \in X$ имеем $\mathbb{P}(\xi_0 = i_0, \ldots, \xi_k = i_k) = p^{(0)}_{i_0} p_1(i_0, i_1) p_2(i_1, i_2) \ldots p_k(i_{k-1}, i_k)$.

3. Напомним формулировку леммы 3 из лекций.

   Следующие утверждения эквивалентны:

   а) Матрица A – стохастическая.

   б) 1. $Af^t \ge 0$ для всех $f \ge 0$. 2. $A\mathbf{1} = \mathbf{1}$, где $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)^t$.

   в) Если μ – распределение вероятностей (т.е. $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_L)$, $\mu_i \ge 0$ и $\sum_{j=1}^{L} \mu_j = 1$), то μA – тоже распределение вероятностей.

   Докажите импликации б) $\Rightarrow$ а) и в) $\Rightarrow$ а).

4. Пусть последовательность случайных величин $\xi_0, \ldots, \xi_T$ образует МЦ, f — функция $f : X \mapsto X$. Верно ли, что последовательность $f(\xi_0), \ldots, f(\xi_T)$ образует МЦ? Верно ли, что последовательность $\xi_T, \ldots, \xi_0$ образует МЦ?

Задачи к третьей лекции (11.10.2019):

1. Пусть $\xi_0, \ldots, \xi_T$ — МЦ с множеством состояний $X = \{1, 2, 3\}$, матрицей переходных вероятностей $A = \begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 1/4 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и начальным распределением $p^{(0)} = (1/3, 1/6, 1/2)$.
   Найдите а) $p^{(2)}$ б) $\mathbb{P}(\xi_1 = 3, \xi_3 = 2)$.

2. Пусть $x \in \mathbb{R}$, $\eta_0 = x$, а $\eta_1, \eta_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $\mathbb{P}(\eta_i = 1) = 1/2 = \mathbb{P}(\eta_i = -1)$. Положим $\xi_j = \sum_{i=0}^{j} \eta_i$.

   а) Будет ли последовательность $(|\xi_j|)_{j \ge 0}$ образовывать МЦ в случае $x = 0$?

   б) А если $x \ne 0$?

[1] Отсчет ведется без учета первых двух лекций по основам ТВ

Задачи к четвертой лекции (18.10.2019):

1. Вычислить переходные вероятности $p_{ij} = \mathbb{P}(\xi_{n+1} = j | \xi_n = i)$ в модели Гальтона-Ватсона, если $\mathbb{P}(\eta_n^i = 0) = p$, $\mathbb{P}(\eta_n^i = 2) = 1 - p$, где $0 < p < 1$.

2. Пусть $\Pi = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$. Доказать, что если $a + b \neq 0$, то $\Pi^n = (a+b)^{-1}\hat{\Pi} + (1-a-b)^n(a+b)^{-1}\widetilde{\Pi}$, где $\hat{\Pi} = \begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix}$ и $\widetilde{\Pi} = \begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix}$.

3. Придумать (однородную) МЦ, имеющую континуум стационарных состояний.

Задачи к пятой лекции (25.10.2019):

1. Докажите утверждение 14: пусть μ, ν — произвольные распределения. Тогда $d_{var}(\mu, \nu) = \sum_{j \in J}(\mu_j - \nu_j)$, где $J = \{j : \mu_j > \nu_j\}$.

   Напомню, что вариационное расстояние между распределениями определяется формулой $d_{var}(\mu, \nu) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{L} |\mu_i - \nu_i|$.

2. Рассмотрим случайное блуждание на множестве состояний $\{1, \ldots, L\}$, заданное вероятностями перехода $p_{ii+1} = p$ и $p_{ii-1} = 1 - p$ для $2 \leq i \leq L - 1$, $p_{12} = a$, $p_{11} = 1 - a$ и $p_{LL-1} = b$, $p_{LL} = 1 - b$ для каких-нибудь $0 < p < 1$ и $0 < a, b \leq 1$, а для остальных i, j выполнено $p_{ij} = 0$.

   a) Докажите, что соответствующая матрица переходных вероятностей эргодична тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из неравенств $a < 1$ или $b < 1$.

   b) Для произвольных a, b, p как выше найдите стационарное состояние. Единственно ли оно?

Задачи к седьмой лекции (15.11.2019):
В следующих задачах рассматриваются только однородные МЦ.

1. Рассмотрим следующие МПВ:

$$a)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.9 & 0.1 & 0 \end{pmatrix}, \quad c)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad d)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Являются ли они эргодическими? Являются ли МЦ с такими МПВ эргодическими?

   Напоминание:

   МПВ Π называется эргодической, если существует $k \in \mathbb{N}$, такое что все элементы матрицы Π^k строго положительны. Другими словами, если для МЦ с МПВ Π за k шагов можно попасть из любого состояния в любое.

   МЦ называется эргодической, если для нее выполнены утверждения эргодической теоремы, кроме утверждения, что $\pi_j > 0$ для всех j, где π — стационарное состояние.

2. Верно ли, что всякая МЦ, имеющая единственное стационарное состояние, эргодична?

3. Привести пример МЦ $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$, такой что она не эргодична, но для нее выполнен ЗБЧ (в том виде, в котором он доказывался на лекции).

   Указание: пожалуй, здесь удобнее искать пример, для которого выполнен усиленный ЗБЧ: $\mathbb{P}(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(\xi_k) \to \langle \pi, f\rangle) = 1$. *То есть, вместо сходимости по вероятности имеет место сходимость почти наверное. Усиленный ЗБЧ влечет обычный, так как сходимость почти наверное влечет сходимость по вероятности.*

4. Привести пример МЦ $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$, такой что для нее не выполнен ЗБЧ. То есть, существует функция f, для которой предел последовательности $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(\xi_k)$ либо не существует, либо зависит от начального условия.

5. Рассмотрим МЦ $\xi_0, \xi_1, \ldots$ с множеством состояний $\{1, \ldots, L\}$, $L \geq 2$, такую что $p_{11} = 1$. Допустим, что для каждого состояния $2 \leq i \leq L$ существует $k_i \geq 1$, такое что $p_{i1}^{(k_i)} > 0$ — вероятность перейти из состояния i в состояние 1 за k_i шагов положительна.

   а) Покажите, что МПВ такой МЦ не может быть эргодической.

   б) Докажите, что последовательность $(p_{i1}^{(m)})_{m\geq 0}$ не убывает. В частности, $p_{i1}^{(n)} \geq \delta$ для всех $n \geq k$, где $k = \max_i k_i$, а $\delta = \min_i p_{i1}^{(k_i)} > 0$.

   в) Используя предыдущий пункт, докажите, что $\mathbb{P}(\xi_k \neq 1) \leq 1 - \delta$, где k и δ определены в предыдущем пункте.

   г) Покажите, что $\mathbb{P}(\xi_{mk} \neq 1) \leq (1-\delta)^m$ для любого $m \geq 1$.

   д) Покажите, что $\mathbb{P}(\exists k \geq 0 :\ \xi_n = 1\, \forall n \geq k) = 1$.

   е) Покажите, что такая МЦ эргодична: существуют постоянные $0 < \lambda < 1$ и $C > 0$, такие что $|p_i^{(n)} - \delta_{i1}| \leq C\lambda^n$ для любого начального распределения $p^{(0)}$, где δ_{i1} — символ Кронекера, и что $\pi = (1, 0, \ldots, 0)$ — единственное стационарное состояние МЦ.

6. *Необязательная задача (дополняющая предыдущую).* Рассмотрим МЦ $\xi_0, \xi_1, \ldots$, с множеством состояний $\{1, \ldots, L\}$, $L \geq 2$, такую что $p_{11} = 1$ и $p_{22} = 1$. Допустим, что для каждого состояния $3 \leq i \leq L$ существует $k_i \geq 1$, такое что хотя бы одна из вероятностей $p_{i1}^{(k_i)}$ либо $p_{i2}^{(k_i)}$ положительна. Покажите, что такая МЦ не может быть эргодической. Докажите, что

$$\mathbb{P}(\exists k \geq 0 :\ \xi_n = 1\, \forall n \geq k \text{ or } \xi_n = 2\, \forall n \geq k) = 1.$$

Задачи к восьмой и девятой лекции (22.11.2019):

1. Рассмотрим МЦ с матрицей переходных вероятностей $\Pi = (p_{ij})$. Докажите, что если выполнено соотношение

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji} \qquad \forall i, j,$$

   то π — стационарное состояние этой МЦ.

2. С помощью алгоритма Метрополиса-Хастингса постройте эргодическую МЦ (с тремя состояниями), такую что распределение $\pi = (7/15, 1/5, 1/3)$ является ее (единственным) стационарным состоянием. Прямым вычислением убедитесь, что π — действительно ее стационарное состояние.

3. Докажите вторую часть первого пункта теоремы Перрона-Фробениуса. А именно, пусть матрица $A = (a_{ij}) > 0$ в том смысле, что $a_{ij} > 0$ для всех i, j. Докажите, что существует $\lambda > 0$ и вектор-строка f, такие что $fA = \lambda f$ и $f_j > 0$ для всех j (т.е. f — положительный левый собственный вектор с собственным значением λ).

Задачи к десятой лекции (6.12.2019):

1. Докажите второй пункт теоремы Перрона-Фробениуса о единственности положительного собственного вектора: пусть матрица $A = (a_{ij}) > 0$ в том смысле, что $a_{ij} > 0$ для всех i, j. Тогда, если вектор-строка v удовлетворяет соотношениям $v_j > 0$ $\forall j$ и $vA = \mu v$ для некоторого $\mu \in \mathbb{C}$, то $\mu = \lambda$ и $v = cf$, где c — константа, а λ и f — собственное число и левый собственный вектор из последней задачи к 8-9 лекциям. Докажите аналогичный результат для правого собственного вектора.

   Указание: можно пользоваться пунктом 3 теоремы Перрона-Фробениуса.

2. *При доказательстве теоремы Перрона-Фробениуса мы пользовались эргодической теоремой. В этой задаче предлагается доказать обратное утверждение, состоящее в том, что теорема П-Ф влечет эргодическую теорему (теорему П-Ф можно доказать и без использования эргодической теоремы).*

   Рассмотрим МЦ с МПВ $\Pi = (p_{ij})$ и допустим, что для матрицы Π выполнено утверждение теоремы Перрона-Фробениуса. Докажите, что тогда МЦ эргодична, в том смысле, что для любого начального распределения $p^{(0)}$ выполнено $p^{(n)} \to f$ при $n \to \infty$, где f — левый собственный вектор матрицы Π (нормированный так, что $\sum_j f_j = 1$). Покажите, что f — единственное стационарное состояние МЦ.

3. Пусть A — стохастическая матрица размера $L \times L$. Показать, что $\lambda_1 = 1$ является ее собственным значением, а остальные собственные значения $\lambda_2, \ldots, \lambda_L$ по модулю не превосходят 1. Показать, что если все собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_L$ различны, то элементы $a_{ij}^{(k)}$ матрицы A^k допускают представление

$$a_{ij}^{(k)} = q_j + c_{ij}(2)\lambda_2^k + \ldots + c_{ij}(L)\lambda_L^k,$$

где постоянные $q_j, c_{ij}(2), \ldots, c_{ij}(L)$ выражаются через элементы матрицы A

Из этого подхода, в частности, следует, что при $|\lambda_2|, \ldots, |\lambda_L| < 1$ *существует предел* $a_{ij}^{(k)} \to q_j$ *при* $k \to \infty$, *не зависящий от* i. *Отсюда следует эргодичность МЦ с МПВ А.*