

Листок 10 Альфа

Четность. Часть 1.

Упражнение 1: Катя записывает 100 произвольных чисел, Петя складывает их, а Вася умножает. Какие числа должна написать Катя, чтобы и у Пети, и у Васи получились чётные результаты? Чтобы у обоих мальчиков получились нечётные результаты? Чтобы у одного получился чётный результат, а у второго - нечётный?

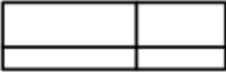
Упражнение 2: На столе лежат 25 яблок. Малыш-математик забегает на кухню, затем либо кладёт на стол одно яблоко, либо забирает со стола одно яблоко, затем оглушительно хлопает дверью и убегает. Сосед снизу насчитал 50 оглушительных хлопков двери. Может ли вернувшаяся из магазина мама не обнаружить на столе яблок?

1. Хулиган Афанасий вырвал из книги 25 листов, сложил номера всех вырванных страниц и получил ответ 2020. Мог ли Афанасий получить правильный ответ?
2. Докажите, что при любых натуральных m и n выражение $mn(m + n)$ чётно.
3. На доске написаны натуральные числа от 1 до 125. За ход разрешается стереть любые два числа и записать вместо них их разность. После 124 таких ходов на доске останется одно число. Докажите, что оно не может равняться нулю.
4. На волшебной поляне растут дубы. Каждую минуту из земли либо вырастает три новых дуба, либо исчезают пять старых дубов. Удивлённый лесник Пафнутий обратил внимание, что когда он вышел на поляну, на ней росло ровно 45 дубов. Могут ли все дубы исчезнуть за полчаса?
5. За круглым столом сидят мальчики и девочки. Докажите, что количество пар соседей разного пола чётно.

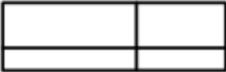
Четность. Часть 2.

6. На доске написано 2020 плюсов и 2019 минусов. Кеша может либо стереть два одинаковых знака и записать вместо них знак $+$, либо стереть два разных знака и записать вместо них знак $-$. После 4038 таких операций на доске остался один знак. Какой?
7. Катя задумала два числа и нашла их сумму. Затем она нашла произведение тех же самых чисел. А затем умножила полученную сумму на полученное произведение. В результате получилось число 20202019. Могло ли так быть?
8. Бегуны Альберт, Бертран и Вальдемар участвуют в забеге. Вальдемар задержался на старте и выбежал последним, а Альберт, наоборот, стартовал первым. За время забега Вальдемар поменялся местами с другими участниками гонки 6 раз, а Альберт — 5 раз. При этом Бертран финишировал раньше Альберта. В каком порядке финишировали участники?
9. В Низшем Институте Расточительства проходили конкурсы по математике, физике, биологии, географии и фехтованию. Известно, что каждый школьник поучаствовал в нечётном числе конкурсов, и число участников каждого конкурса также было нечётным. Чётным или нечётным было общее число учеников, участвовавших в конкурсах?
10. В клетках таблицы 10×10 расставлены числа от 1 до 100 без повторений. Ефим посчитал сумму чисел в каждой строке таблицы и выписал их на доску в порядке возрастания. Могут ли любые два соседних числа на доске отличаться ровно на единицу?
11. В пробирке находятся марсианские амёбы трёх типов: А, В и С. Любые две амёбы разных типов при слиянии превращаются в одну амёбу третьего типа. Изначально в пробирке было 20 амёб типа А, 21 амёба типа В и 22 амёбы типа С. После некоторого числа слияний в пробирке осталась одна амёба. Какого типа может быть эта амёба?

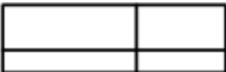
Четность. Часть 3.

12. На доске написано число 123456789. За ход разрешается поменять любые две соседние цифры местами, а затем уменьшить обе цифры на единицу. Какое наименьшее число можно получить в результате нескольких таких ходов?
13. К девятизначному числу прибавили число, записанное теми же цифрами в обратном порядке. Докажите, что хотя бы одна цифра полученной суммы чётна.
14. На рисунке можно найти 9 прямоугольников. Известно, что у каждого из них длина и ширина — целые. Сколько прямоугольников из этих девяти могут иметь нечётную площадь?
- 
15. Взяли пять натуральных чисел и для каждого двух записали их сумму. Могло ли оказаться, что все 10 получившихся сумм оканчиваются разными цифрами?
16. Можно ли нарисовать 9-звенную замкнутую ломаную, каждое звено которой пересекается ровно с одним из остальных звеньев?

Четность. Часть 3.

12. На доске написано число 123456789. За ход разрешается поменять любые две соседние цифры местами, а затем уменьшить обе цифры на единицу. Какое наименьшее число можно получить в результате нескольких таких ходов?
13. К девятизначному числу прибавили число, записанное теми же цифрами в обратном порядке. Докажите, что хотя бы одна цифра полученной суммы чётна.
14. На рисунке можно найти 9 прямоугольников. Известно, что у каждого из них длина и ширина — целые. Сколько прямоугольников из этих девяти могут иметь нечётную площадь?
- 
15. Взяли пять натуральных чисел и для каждого двух записали их сумму. Могло ли оказаться, что все 10 получившихся сумм оканчиваются разными цифрами?
16. Можно ли нарисовать 9-звенную замкнутую ломаную, каждое звено которой пересекается ровно с одним из остальных звеньев?

Четность. Часть 3.

12. На доске написано число 123456789. За ход разрешается поменять любые две соседние цифры местами, а затем уменьшить обе цифры на единицу. Какое наименьшее число можно получить в результате нескольких таких ходов?
13. К девятизначному числу прибавили число, записанное теми же цифрами в обратном порядке. Докажите, что хотя бы одна цифра полученной суммы чётна.
14. На рисунке можно найти 9 прямоугольников. Известно, что у каждого из них длина и ширина — целые. Сколько прямоугольников из этих девяти могут иметь нечётную площадь?
- 
15. Взяли пять натуральных чисел и для каждого двух записали их сумму. Могло ли оказаться, что все 10 получившихся сумм оканчиваются разными цифрами?
16. Можно ли нарисовать 9-звенную замкнутую ломаную, каждое звено которой пересекается ровно с одним из остальных звеньев?