

Вопросы к экзамену по курсу «Дифференциальные уравнения», 2019/20 уч. г.

Билет экзамена будет состоять из двух вопросов из списка. На подготовку даётся 45 минут, но уже через 30 минут вы должны быть готовы ответить минимум на один вопрос билета.
Если в ответе на вопрос вы пользуетесь утверждением или определением из первой части курса, вы должны уметь его сформулировать.

1. Линейное уравнение n -го порядка с постоянными коэффициентами: решение однородного уравнения и неоднородного уравнения с квазимногочленом в правой части.
2. Система n линейных однородных уравнений 1-го порядка. Экспонента матрицы: существование, дифференциальное уравнение. Связь решений линейной системы с матричной экспонентой.
3. Нахождение матричной экспоненты. Решение линейных неоднородных систем с квазимногочленом в правой части.
4. Теорема Пеано о существовании решений задачи Коши. (Теорему Арцела—Асколи нужно сформулировать, но можно не доказывать.)
5. Теорема о дифференцировании решения задачи Коши по параметру. (Сведение к случаю, когда от параметра зависит только начальное условие, доказательство в этом случае.)
6. n -кратная дифференцируемость решений задачи Коши по параметру. Следствия для операторов Коши и преобразований потока. Асимптотическое разложение решений по степеням параметра (можно на примере задачи $\ddot{x} = \sin x$, $x(0) = \lambda$, $\dot{x}(0) = 0$, до $o(\lambda^3)$).
7. Теорема о выпрямлении векторного поля.
8. Устойчивость постоянных решений: по Ляпунову и асимптотическая. Примеры, различающие эти типы устойчивости. Теоремы Ляпунова и Четаева.
9. Линеаризация векторного поля в окрестности неподвижной точки. Независимость от системы координат. Условия устойчивости/неустойчивости по линейному приближению.
10. Теоремы Адамара—Перрона и Гробмана—Хартмана (без доказательства).
11. Фазовый портрет уравнения $\ddot{x} = \omega^2 \sin x$: первый интеграл, качественное поведение решений, поведение вблизи неустойчивого положения равновесия, асимптотика периода малых колебаний вокруг устойчивого положения равновесия.
12. Однопараметрические группы диффеоморфизмов: порождение потоком векторного поля. Группы симметрий поля направлений и понижение порядка ДУ.
13. Коммутирование векторных полей и коммутирование их потоков. Коммутатор векторных полей: координатное и бескоординатное определения.
14. Поля r -плоскостей в области в \mathbb{R}^n . Слоения. Слоение, интегрирующее поле плоскостей. Теорема Фробениуса об условии локальной интегрируемости поля плоскостей (в терминах векторных полей, его порождающих).