Листок 4. Дифференциальные формы
Гладкие многообразия
Крайний срок сдачи 22.01.2020

1. Найдите значения значения дифференциальных форм ω на указанных векторах:

(а) $\omega = dx^1 \wedge dx^3 + x^1 dx^2 \wedge dx^4$ на упорядоченной паре векторов ξ_1, ξ_2;

(б) $\omega = df$, где $f = x^1 + 2x^2 + \ldots + nx^n$, $\xi = (1, -1, \ldots, (-1)^{n-1})$.

2. Пусть v_1, v_2, v_3, v_4 линейно независимые вектора пространства V. Могут ли существовать $\xi_1, \xi_2 \in V$ такие, что

(а) $v_1 \wedge v_2 + v_2 \wedge v_3 + v_3 \wedge v_4 = \xi_1 \wedge \xi_2$?

(б) $v_1 \wedge v_2 + v_2 \wedge v_3 + v_3 \wedge v_4 + v_4 \wedge v_1 = \xi_1 \wedge \xi_2$?

3. Докажите следующие свойства производной Ли:
(а) $L_X f = Xf$, если f — гладкая функция;
(б) $dL_X\omega = L_X d\omega$;

4. Пусть X, Y — векторные поля, ω — 1-форма. Докажите соотношение:

$$d\omega(X, Y) = L_X\omega(Y) - L_Y\omega(X) + \omega([X, Y]).$$

5. Вычислите интегралы:
(а) $\oint_L -x^2y dx + xy^2 dy$, где L — окружность $x^2+y^2 = R^2$ в $\mathbb{R}^2$, пробегаемая в положительном направлении;
(б) $\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$ для любого контура L. Как ответ соотносится с формулой Стокса?

6. Покажите, что гладкая k-мерная поверхность ориентируема тогда и только тогда, когда на ней существует нигде не вырождающаяся k-форма.

7. (а) Докажите, что на $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ существует и единственна с точностью до множителя 2-форма, инвариантная относительно группы $SO(3)$. (б) Выпишите эту форму явно в координатах φ, ψ (широта и долгота). (в) Найдите все $SO(3)$-инвариантные 2-формы на $\mathbb{R}^3$. Проверьте, что при ограничении на S^2 получаются формы, описанные в пункте (б).

8. Покажите, что всякая матричная подгруппа в $GL_n(\mathbb{R})$, сохраняющая некоторый фиксированный тензор, является подмногообразием.

9. Запишем элементы $(p, \tau) \in T^*M$ кокасательного расслоения к многообразию M в координатах как $(p, v) = (p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$, где $\tau = q_1 dp_1 + \ldots + q_n dp_n$.
(а) Докажите, что форма, заданная формулой $\omega = dp_1 \wedge dq_1 + \ldots + dp_n \wedge dq_n$ в каждой карте, действительно, является невырожденной формой на M.
(б) Чему равна n-я внешняя степень $\omega^{\wedge^n}$ формы ω? Выведите отсюда ориентируемость кокасательного расслоения.