

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО – 2020
Листок 1

срок сдачи 14.02.2020

1. Покажите, что если $f(z)$ голоморфна в точке $z = a$, то функция $\overline{f(\bar{z})}$ будет голоморфной в $z = \bar{a}$. Найдите значение её производной в этой точке.

2. Покажите, что если для голоморфной в области D функции f при всех $z \in D$ выполняется $f(z) \in \mathbb{R}$ или $|f(z)| = 1$, то эта функция постоянна.

3. Найдите все голоморфные функции $f(z, \bar{z})$ такие что

а) $\operatorname{Im} f(z) = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$

б) $\arg f(z) = xy \pmod{2\pi}$

4. Докажите, что если f голоморфная в области D функция, то $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$ гармонические в D . Сравните с нулём $\Delta|f|$ и $\Delta \arg f$.

5. Найдите все гармонические функции $F(x, y)$ вида $F = \varphi(x^2 + y^2)$, $F = \varphi(x^2 - y^2)$, $F = \varphi(\frac{y}{x})$.

6. * Найдите голоморфные функции, с постоянными вдоль линий семейства $\{x^2 + y^2 = Cx | C \in \mathbb{R}\}$

- действительной частью
- мнимой частью
- модулем
- аргументом

7. Докажите что дробно-линейные преобразования сохраняют отношение симметрии относительно обобщённых окружностей.

8. * Найдите общий вид дробно-линейных отображений

- $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$
- $\mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$
- $\mathbb{U} \rightarrow \mathbb{H}$

где \mathbb{H} верхняя полуплоскость, а \mathbb{U} единичный круг.

9. Пусть $f(z) = -\frac{4z+1}{6z+1}$. Покажите, что для всякого $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ существуют конечные пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{f\left(f\left(\dots f(z_0)\right)\right)}_{n \text{ раз}}, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \underbrace{f^{-1}\left(f^{-1}\left(\dots f^{-1}(z_0)\right)\right)}_{m \text{ раз}} \text{ и найдите их.}$$

10. Докажите, что если все корни многочлена $P(z)$ вещественны, то для любого вещественного a все корни многочлена $Q(z) = P(z + ia) + P(z - ia)$ также вещественны.

*Задача зачитывается только при полной сдаче всех пунктов.