ПЯТАЯ ВЫСОТА, ВШЭ, ТЛ "ДваждыДва" 19 января 2020

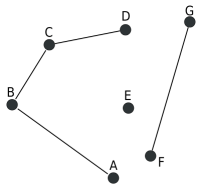
Листок 12 Бета **Графы. Часть 1.**

Упражнение 1: 1. В деревне 9 домов. Известно, что у Петра соседи Иван и Антон, Максим сосед Ивану и Сергею, Виктор – Диме и Никите, Евгений – сосед Никиты, а больше соседей в этой деревне нет (соседними считаются дворы, у которых есть общий участок забора). Может ли Петр пробраться огородами к Никите за яблоками?

Упражнение 2: В компьютерном классе 7 компьютеров, некоторые пары компьютеров должны быть соединены кабелями. От каждого компьютера должно отходить по 4 кабеля. Сколько всего понадобится кабелей?

Что это за зверь такой - граф?

Граф - совокупность точек (вершин), некоторые из которых соеденены отрезками (ребрами). **Примеры:** схема метро, карта дорог, чертеж прямоугольника (почему?).
Степенью вершины называется количество ребер, которые выходят из этой вершины. Например, на рисунке у вершины C степень 2, у вершины D - 1, а у вершины E - 0.



1. В стране 329 городов, из каждого выходит по 4 дороги. Сколько всего дорог в стране?
2. Имеется 10 человек, некоторые из них знакомы. Может ли среди них быть а) 6 человек, у которых 3 знакомых из этой компании, а у остальных — по 2? б) 7 человек? в) сформулируйте правило для N человек?
3. Существуют ли следующие графы? (привести пример или доказать, что его не существует)
   а) 4 вершины, степени которых равны 3, 2, 2, 1
   б) 5 вершин, степени которых равны 4, 4, 3, 3, 1
   в) 5 вершин, степени которых равны 4, 4, 4, 4, 4
   г) 5 вершин, степени которых равны 4, 4, 4, 4, 2.
4. На концерте каждую песню исполняли двое артистов, и никакая пара не выступала вместе более одного раза. Всего было 12 артистов, каждый выступил 5 раз. Сколько было песен?
5. У марсиан бывает произвольное число рук. Однажды все марсиане взялись за руки так, что свободных рук не осталось. Докажите, что число марсиан, у которых нечётное число рук, чётно.

Графы. Часть 2.

6. В классе 30 человек. Может ли быть так, что 9 из них имеет по 3 друга, 11 — по 4 друга, а 10 — по 5 друзей?
7. Джон, приехав из Диснейленда, рассказывал, что там на заколдованном озере имеются семь островов, с каждого из которых ведет один, три или пять мостов. Верно ли, что хотя бы один из этих мостов обязательно выходит на берег озера?
8. В некотором государстве 6 городов и 10 автодорог, каждая из которых связывает какие-то два города. Между городами устанавливается авиационное сообщение, исходя из принципа экономии: авиационная линия между двумя городами устанавливается, только если автомобильная дорога между этими городами отсутствует. Сколько авиалиний будет проведено?
9. Иван утверждает, что среди любых а) четырёх; б) пяти; в) шести человек обязательно найдётся либо трое знакомых друг с другом, либо трое незнакомых. Не завирается ли он?
10. Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?

Графы. Часть 3.

11. Из столицы Тридевятого царства выходит 39 дорог, из крепости Дальняя выходит одна дорога, а из всех остальных городов царства выходит по 20 дорог (любые два города соединяются не более чем одной дорогой, и дорог с началом и концом в одном и том же городе нет). Доказать, что гонец царя может проехать по дорогам из столицы в крепость Дальнюю.

12. За рекой живёт 17 медведей, на дальних холмах – 14, а в зелёной долине – 20. В один прекрасный день они все пришли ловить в реке лососей. Медведи очень дружелюбные и делились каждой пойманной рыбой с ещё одним медведем. В итоге оказалось, что у каждого медведя на 1 отличается количество тех, с кем он поделился, от тех, кто с ним поделился. Может ли это быть правдой?

13. В стране работают 5 перевозчиков на коврах-самолётах, причём у них нет одинаковых маршрутов. Из Дальнинска, Заморска, Небыльска, Перевёртышска и Города-негорода выходит только по 1 маршруту, из всех остальных городов – по 5 маршрутов – по одному каждой авиакомпании. Докажите, что в перечисленные 5 городов летают ковры разных компаний.

14. При каком $n > 1$ может случиться так, что в компании из $n + 1$ девочек и n мальчиков все девочки знакомы с разным числом мальчиков, а все мальчики — с одним и тем же числом девочек?

Графы. Часть 3.

11. Из столицы Тридевятого царства выходит 39 дорог, из крепости Дальняя выходит одна дорога, а из всех остальных городов царства выходит по 20 дорог (любые два города соединяются не более чем одной дорогой, и дорог с началом и концом в одном и том же городе нет). Доказать, что гонец царя может проехать по дорогам из столицы в крепость Дальнюю.

12. В некотором городе на любом перекрестке сходятся ровно 3 улицы. Улицы раскрашены в три цвета так, что на каждом перекрестке сходятся улицы трех разных цветов. Из города выходят три дороги. Докажите, что они имеют разные цвета.

13. В стране работают 5 перевозчиков на коврах-самолётах, причём у них нет одинаковых маршрутов. Из Дальнинска, Заморска, Небыльска, Перевёртышска и Города-негорода выходит только по 1 маршруту, из всех остальных городов – по 5 маршрутов – по одному каждой авиакомпании. Докажите, что в перечисленные 5 городов летают ковры разных компаний.

14. При каком $n > 1$ может случиться так, что в компании из $n + 1$ девочек и n мальчиков все девочки знакомы с разным числом мальчиков, а все мальчики — с одним и тем же числом девочек?

Графы. Решение

1. 329 городов соеденено 4-мя дорогами, значит всего выездов из каждого города 329 x 4 = 1316. При этом каждая дорога соединяет 2 выезда, то есть получаем 1316 / 2 = 658 дорог.
2. а) такое возможно. Не сложно нарисовать пример б)каждое ребро увеличивает степени двух вершин, которые оно соединяет на 1, то есть сумма степеней вершин увеличивается на 2, а значит каким бы не было число ребер, сумма всех степеней будет будет вдвое больше, то есть четным числом (нужно обратить на это внимание в начале урока, но не формулировать лемму в явном виде) в) для всех нечетных N =< 10 не получится это не возможно. Про нечетность обоснование, как в пункте б, причем у нас всего 10 человек.
3. а) существует б) нет (нечетная сумма степеней) в) существует (полный граф) г) нет (Пусть степень каждой из четырёх вершин равна 4. Это значит, что каждая из них соединена со всеми остальными вершинами (в том числе и с пятой). Значит, степень пятой вершины равна 4)
4. Изобразим эту ситуацию в виде графа. Тогда каждый артист - вер-шина графа, и две вершины соединены, если соответствующие им артисты вы-ступали вместе, то есть пели песню. Тогда вопрос задачи: сколько ребер в данномграфе? У нас есть 12 вершин, степень каждой из которых 5. Тогда так же, как ив задаче 1 найдем число ребер по формуле$(12 \cdot 5) : 2 = 30$. То есть было исполнено 30 песен.
5. Рассмотрим граф, в котором вершины - это марсиане, а две верши-ны соединены, если соответствующие им два марсианина взялись за руки. Тогдавопрос задачи формулируется так: докажите, что число вершин нечетной степе-ни - четно.При сложении степеней вершин каждое ребро учитывается дважды: по разу длякаждой из вершин, которые оно соединяет. Значит, общая сумма степеней всехвершин – четное число. Очевидно, что при сложении степеней четных вершинполучится четное число. Общая сумма – тоже четное число, значит сумма сте-пеней нечетных вершин – четное число (иначе нечетное число в сумме с четнымчислом дали бы четное, что невозможно). Вспомним, что сумма нечётного числанечётных чисел нечётна => число вершин нечетной степени - четно
6. В соответствующем графе было бы 30 вершин, 9 из которых имелибы степень 3, 11 – степень 4, 10 – степень 5. Однако у такого графа 19 нечётныхвершин, что противоречит задаче 5.
7. Если бы ни один мост не выходил на берег, то в соответствующем графе было бы семь нечётных вершин, что означает, что сумма степеней вершин нечетная, а значит такого графа не существует.
8. Из каждого города можно отправиться в 5 остальных. То есть если бы между всеми городами существовали бы дороги, то их было бы 6 x 5 / 2 = 15. 10 дорог уже построили, поэтому авиалиний остается построить всего 15 - 10 = 5.
9. Иван завирается везде, доказываем контрпримерами
10. Рассмотрим граф, вершины которого – данные отрезки, а ребро соединяет две вершины тогда, когда два соответствующих отрезка пересекаются. У него 9 нечётных вершин, что сумма степеней вершин нечетная, а значит такого графа не существует.
11. Если из столицы в крепость не будет дорог, это означает, что эти два пункта назначения находятся в разных графах, что в свою очередь означает, что каждый из этих графов будет содержать много четных вершин и одну нечетную вершину. Из этого следует, что сумма степеней верщин в каждом из этих графов будет нечетной. А графа с нечетной суммой степеней вершин существовать не может.
12. Разобьём каждую улицу на две полуулицы и сосчитаем их число. Если n – число перекрёстков в городе, а ci – число внешних дорог цвета i, то числа полуулиц каждого цвета будут n + c1, n + c2, n + c3. Все эти числа чётные, следовательно, чётность чисел c1, c2, c3 одинакова. По условию c1 + c2 + c3 = 3. Значит, c1 = c2 = c3 = 1.

13. 1) городов из которых ведет по 5 дорог - нечетное число, потому что в сумме нечетных вершин должно быть четно 2) Рассмотрим маршруты между городами, по которым летает одна компания (например, номер 1). Поскольку из каждого города выходит по одному маршруту каждой компании, то сумма степеней вершин для графа, который образует машрут этой компании будет четным (выше мы доказали, что городов нечетное количество). Поэтому компания 1 должна посетить один из крупных городов с 1 маршрутом, чтобы сумма степеней была четной. Аналогично для остальных компаний.

14. При нечетном: Каждая девочка может быть знакома минимум с 0 мальчиков, а максимум с n. Пусть n(количество мальчиков) четное число, тогда девочек n + 1 нечетное количетство. Тогда сумма знакомых знакомств девочек и мальчиков $0 + 1 + 2... = n(n+1)/2$. Если каждый мальчик знаком с равным количеством девочек, то каждый из них знаком с $(n + 1)/2$ девочками. Но n + 1 нечетное число, а значит это невозможно. Наоборот, если мальчиков нечетное число n, то (n + 1) - четное число.