Задачи к 30.01

1) Перечислить (с точностью до изоморфизма) все кольца, состоящие из 2, 3 и 4 элементов, с точностью до изоморфизма. (На самом деле, следующее число с трудным ответом это 8.)

2)Почему изоморфны булевы алгебры $\{0,1\}^n$ (т.е. булевы векторы с покомпонентными операциями $\vee$ и $\wedge$) и $2^{\{1,2,\ldots,n\}}$ (т.е. подмножества множества $\{1,2,\ldots,n\}$ с операциями объединения и пересечения)?

3) Придумать булеву алгебру, не изоморфную 2^Ω ни для какого множества Ω.

4а) Пусть A — булева алгебра. Проверить, что операция сложения на A, определенная формулой $x + y = \bar{x}y \vee x\bar{y}$, превращает A в булево кольцо. (Т.е. требуется проверить все аксиомы кольца, наименее очевидны ассоциативность сложения и дистрибутивность.)

4б) Пусть A — булево кольцо. Проверить, что операция дизъюнкции на A, определенная формулой $x \vee y = x + y + xy$, и операция отрицания, определенная формулой $\bar{x} = x + 1$, превращают A в булеву алгебру. (Т.е. требуется проверить все аксиомы булевой алгебры.)

5)Докажите, что идемпотентный линейный оператор в конечномерном пространстве в подходящем базисе задается диагональной матрицей, на диагонали которой стоят только нули и единицы. Как перенести это утверждение на бесконечномерный случай?

6) Пусть f некоторый линейный оператор в векторном пространстве V, $v \in V$ — некоторый вектор, причем известно, что векторы v, $f(v)$, $f^2(v)$, $\ldots f^{n-1}(v)$ линейно независимы, а $f^n(v) = \sum_{k=0}^{k=n-1} a_k f^k(v)$. Найти минимальный и характеристический многочлены ограничения оператора f на линейную оболочку векторов v, $f(v)$, $f^2(v)$, $\ldots f^{n-1}(v)$.