Листок 5. Когомологии де Рам
Гладкие многообразия
Крайний срок сдачи 12.02.2020

1. Докажите, что если $M = M_1 \sqcup M_2$ (дизъюнктное объединение) то

$$H^k(M) = H^k(M_1) \oplus H^k(M_2).$$

2. Найдите когомологии де Рама плоскости без начала координат $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$.

3. Запишем гладкое отображение $h : M \times [0,1] \to M$ как семейство отображений $h_t : M \to M$. Правда ли, что для любой замкнутой на M формы ω, все формы h_t^*, $t \in [0,1]$ будут принадлежать одному классу когомологий? *(Указание: проанализируйте доказательство теоремы Пуанкаре.)*

4. Пусть A, B, C — гладкие функции переменных $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, такие, что

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0.$$

Найдите решение системы в частных производных

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = A \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = B \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = C \end{cases}$$

с неизвестными функциями P, Q, R. *(Указание: достаточно найти такую 1-форму η, что выполнено: $A\,dy \wedge dz + B\,dz \wedge dx + C\,dx \wedge dy = d\eta$.)*

5. Найдите когомологии де Рама бутылки Клейна K^2.

6. Чему равны когомологии де Рама $H^k(S^n)$?