Задачи к 31.01.

Во всех задачах поле предполагается алгебраически замкнутым.

(1) Пусть $F(x, y, z)$ однородная форма степени 3. Придумать, как выбрать координаты, в которых бы форма оказалась записана в наиболее простом виде.

(2) Пусть гиперповерхность $X \subset \mathbb{P}^n$ задана однородным уравнением $F(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0$ степени d, точка $a \in X$, b — любая точка. Запишем точки прямой ab как $a + tb$, тогда ограничение формы F на прямую ab будет многочленом от t: $F(a+tb) = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + \ldots$. Как выразить коэффициенты этого многочлена (хотя бы α и β) через F?

(3) Пусть гиперповерхность $X \subset \mathbb{P}^n$, заданная однородным уравнением $F(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0$ степени d, содержит гиперплоскость, заданную линейным уравнением $L(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0$. Докажите, что F делится на L.

(4) Описать все поверхности второй степени в $\mathbb{P}^3$, на которых не лежат никакие две скрещивающиеся прямые.

(5) Доказать, что если на поверхности второй степени в $\mathbb{P}^3$ лежат две скрещивающиеся прямые (и она не содержит плоскость), то она задается конструкцией Штейнера.

(6) В $\mathbb{P}^3$ даны три попарно скрещивающиеся прямые. Докажите, что геометрическое место точек, лежащих на прямых, пересекающих все три эти прямые, является квадрикой.

(7) Четыре попарно скрещивающиеся прямые l_1, l_2, l_3 и l_4 пересекают прямую m. Докажите, что существует еще одна прямая, пересекающая l_1, l_2, l_3 и l_4.

(8) Докажите формулу Эйлера: если $F(x_1, \ldots, x_n)$ является однородным многочленом степени k, то

$$x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial F}{\partial x_n} = kF.$$