2020 г

Задание к теме "Группа кос"

(1а) Расклассифицируйте все неэквивалентные неразложимые представления группы кос

$$\rho_V : \quad B_3 \longrightarrow Aut_{\mathbb{C}}(V),$$

где V – двумерное линейное пространство.

(1б) Какие из этих представлений неприводимы?

<u>Подсказка</u>: решение упрощается, если учесть, что b_1 и b_2 сопряжены друг другу, а значит имеют одинаковые спектральные инварианты в любом представлении B_3.

(2) Проверьте, что группу кос B_n можно задать с помощью только двух образующих: $b_1^{\pm 1}$ и $C_n^{\pm 1}$ (см. стр. 11 записок лекций). Выведите <u>все</u> соотношения для таких генераторов.

(3) Проверьте, что группу кос B_n можно задать с помощью генераторов зацеплений b_{ij} (стр. 11 записок), и выведите <u>все</u> соотношения на них.

(4) Закончите доказательство <u>Леммы 1</u> записок (стр. 13), то есть проверьте формулы сопряжения генераторов крашеных кос A_{ij} (формулы (8) на стр. 15)

(5а) Проверьте выполнение соотношений <u>Леммы 2</u> для генераторов A_{ij} группы крашеных кос P_n (см. на стр. 15–16 записок).

Rem: достаточно вывести эти соотношения в P_4

(5б)* Выведите соотношения сопряжения для генераторов A_{ij} крашеных кос (соотношения приведены на стр стр 16 записок

Rem: Соотношения сопряжения впоследствии помогают доказать, что нормальное замыкание $\langle\{A_{in}\}_{i=1,\dots,n-1}\rangle$ набора элементов A_{in} в группе P_n порождается элементами A_{in}, $i=1\dots,n-1$.

(6) Пусть F — свободная группа; $\{A\}$ и $\{B\}$ — два набора элементов этой группы; $\langle\{A\}\rangle$ и $\langle\{B\}\rangle$ — их нормальные замыкания в F.

Докажите изоморфность фактор-групп

$$(F/\langle\{A\}\rangle)/\langle\{B\}\rangle \cong (F/\langle\{B\}\rangle)/\langle\{A\}\rangle \cong F/\langle\{A,B\}\rangle$$

(7) Разнообразные группы кос можно строить по графам, рёбра которых снабжены кратностями. При этом каждой вершине графа сопоставляется генератор группы кос, а пара генераторов b_α и b_β, чьи вершины соединены ребром кратности $k \geq 0$ (см. Рис):

удовлетворяет соотношению

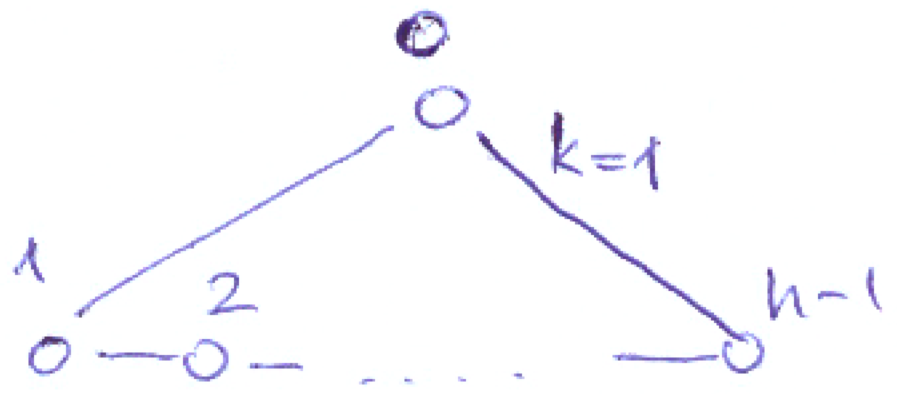
$$\underbrace{b_\alpha b_\beta b_\alpha \ldots}_{(2+K)\text{раз}} = \underbrace{b_\beta b_\alpha b_\beta \ldots}_{(2+K)\text{раз}}$$

чередующиеся произведения

Отсутствие ребра между вершинами α и β интерпретируется как ребро кратности $K=0$. Соответствующие генераторы коммутируют: $b_\alpha b_\beta = b_\beta b_\alpha$.

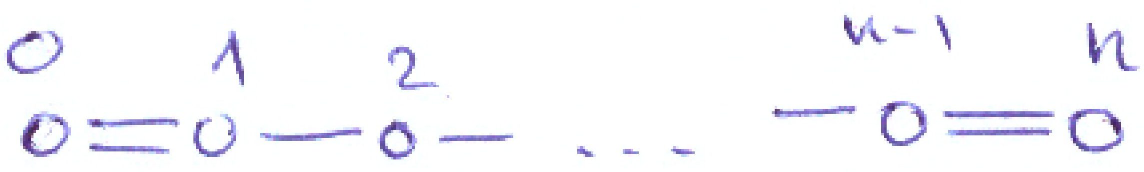
Часто встречающиеся графы и соответствующие группы кос:

артинова группа кос B_n, или группа кос типа A_{n-1}



аффинная группа кос, тип $\tilde{A}_{n-1}$

группа кос типа B_{n-1}



группа кос типа C_{n-1}

Группы кос типа A_{n-1}, B_{n-1} и C_{n-1} являются фундаментальными группами конфигурационных пространств n несовпадающих точек на плоскости, плоскости с выколотой точкой, плоскости с 2-мя выколотыми точками, соответственно.

7а* Проверьте, что внутренний внутренний автоморфизм группы кос типа B_{n-1}, задаваемый элементом

$$c = b_{n-2} b_{n-3} \dots b_1 b_0$$

порождает циклический сдвиг генераторов $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ (без b_0):

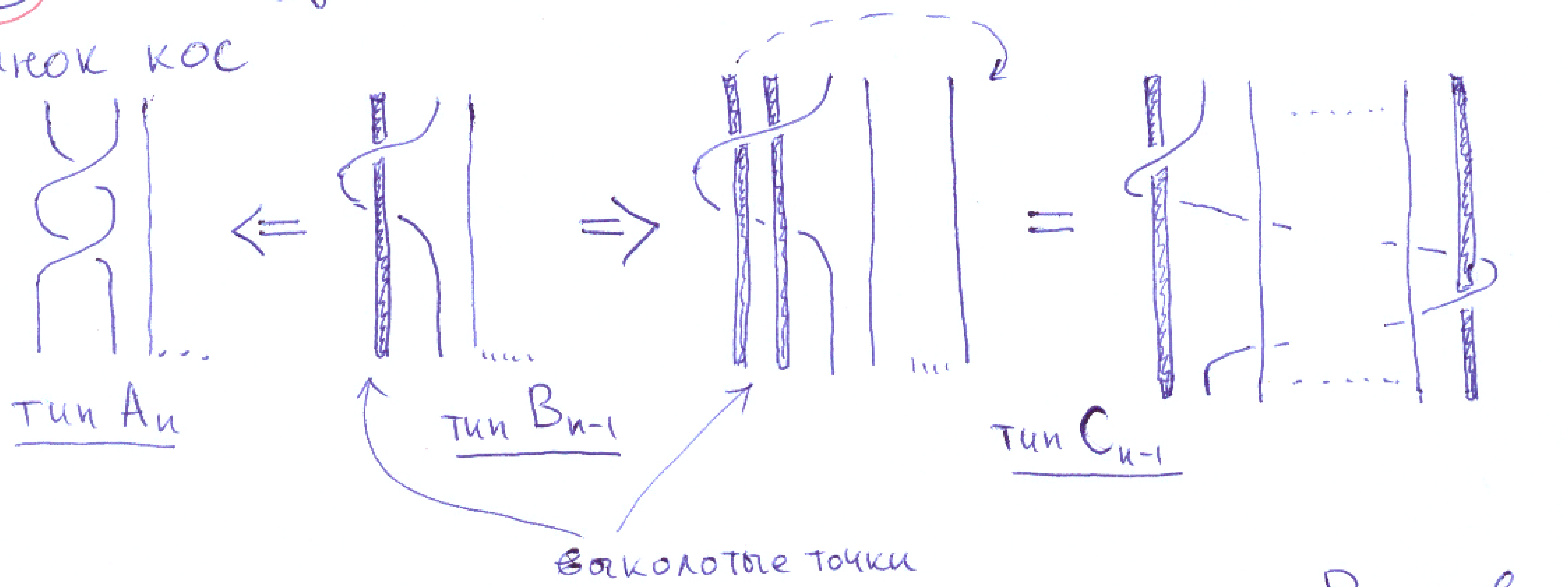
$$\begin{cases} b_{i+1} = c^{-1} b_i c & \text{для } i = 1, \dots, n-2 \\ b_1 = c^{-2} b_{n-1} c^2 \end{cases}$$

Убедитесь, что отображение

$$\begin{cases} b_i \mapsto b_i & i = 1, \dots, n-1 \\ b_0 \mapsto c^{-1} b_{n-1} c \end{cases}$$

порождает гомоморфизм группы кос типа $\tilde{A}_{n-1}$ в группу кос типа B_{n-1}.

7б* Пользуясь естественными сопоставлениями картинок кос



определите гомоморфизмы группы кос типа B_{n-1} в группы кос типов A_n и C_{n-1}.

Замечательный коммутативный набор элементов Юциса-Мэрфи в группе кос типа B_{n-1} задаётся формулами:

$$J_1 := 1, \quad J_2 := b_0,$$

$$J_{i+1} := b_{i-1} J_i b_{\overline{i-1}}$$

Убедитесь в коммутативности этого набора.

Пользуясь ранее определёнными гомоморфизмами, задайте наборы элементов Юциса-Мэрфи в группах кос типов A_n и C_{n-1}.