Задачи к 14.02.

(1) Пусть гиперповерхность $X \subset \mathbb{P}^n$ задана однородным уравнением $F(x_0, \dots, x_n) = 0$. Докажите, что множество касательных к X прямых, проходящих через точку $a \in X$ либо заполняет все $\mathbb{P}^n$ (в этом случае точка a называется особой точкой гиперповерхности X), либо некоторую гиперплоскость $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$. В последнем случае точка a называется простой, или неособой точкой гиперповерхности X, а гиперплоскость называется проективным касательным пространством к X в точке a и обозначается $\mathbb{T}_a X$. Найдите уравнение этой гиперплоскости.

(2) Пусть Y — неособая гиперповерхность в $\mathbb{P}^{n-1}$, а $X \subset \mathbb{P}^n$ это конус над Y, т.е. геометрическое место точек, лежащих на прямых, соединяющих фиксированную точку в $\mathbb{P}^n$ (лежащую вне $\mathbb{P}^{n-1}$) с точками Y. Какие точки X простые, а какие особые?

(3) Каким может быть множество особых точек квадрики в $\mathbb{P}^3$? А в $\mathbb{P}^n$?

(4) Пусть кривая X задана в аффинных координатах параметрически: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Напишите уравнения (параметрические) двойственной кривой $\check{X}$ и выведите, что $\check{\check{X}} = X$.

(5) Докажите, что сопоставление однородной форме $F(x_0, \dots, x_n)$ формы $D_a F = \sum_{k=0}^{k=n} a_k \frac{\partial F}{\partial x_k}(x_0, \dots, x_n)$ является дифференциальным оператором, не зависящим от выбора проективных координат.

(6) (из прошлого задания) Пусть гиперповерхность $X \subset \mathbb{P}^n$ задана однородным уравнением $F(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0$ степени d, точка $a \in X$, b — любая точка. Запишем точки прямой ab как $a + tb$, тогда ограничение формы F на прямую ab будет многочленом от t: $F(a + tb) = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + \dots$. Как выразить коэффициенты этого многочлена через F? В прошлый раз мы выяснили, что $\alpha = 0$ и $\beta = D_b F(a)$. А как выразить следующие коэффициенты?