ЛИСТОК 2
Введение в алгебраическую геометрию - матфак ВШЭ - 2019

1 Докажите, что гипербола $xy = 1$ в аффинной плоскости не изоморфна аффинной прямой. Являются ли они бирационально изоморфными?

2 Пусть $k = \bar{k}$, $f : \mathbb{A}^1_k \to \mathbb{A}^2_k$ отображение, заданное формулой $f(t) = (t^2, t^3)$. Покажите, что f биекция на свой образ, но образ f не изоморфен $\mathbb{A}^1$ (указание: можно вспомнить про целозамкнутость). Покажите, что f задает бирациональный и конечный морфизм на свой образ.

3 Пусть $X \subset \mathbb{A}^3$ - множество точек вида (t, t^2, t^3). Покажите, что X алгебраическое множество и найдите систему образующих идеала $I(X)$. Покажите, что X изоморфно $\mathbb{A}^1$.

4 Разложите алгебраическое множество в $\mathbb{A}^3$, определяемое уравнениями $y^2 = xz$, $z^2 = y^3$ на неприводимые компоненты и опишите эти компоненты.

5 Размерностью аффинного алгебраического множества назовем размерность его кольца регулярных функций. Покажите, что неприводимое алгебраическое подмножество в $\mathbb{A}^n$ (над алгебраически замкнутым полем) тогда и только тогда имеет размерность $n - 1$, когда оно является множеством нулей неприводимого многочлена f (воспользуйтесь теоремой Крулля о главных идеалах).

6 Покажите, что неприводимая невырожденная квадрика в $\mathbb{A}^{n+1}_k$ бирационально изоморфна $\mathbb{A}^n_k$ тогда и только тогда, когда она имеет k-точку.

В следующих упражнениях основное поле предполагается алгебраически замкнутым; рекомендуется проверить, что происходит над произвольным полем.

7 Докажите, что аффинное многообразие не может быть изоморфно проективному, если это не точка. Выведите отсюда, что любое подмногообразие положительной размерности в $\mathbb{P}^n$ пересекает любую гиперплоскость.

8 Пусть $F_0, \dots, F_N$ все мономы степени d от $x_0, \dots, x_n$. Определим отображение Веронезе $v_d : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^N$ формулой $v_d(a_0 : \dots : a_n) = (F_0(a) : \dots : F_N(a))$, где $a = (a_0, \dots, a_n)$. Докажите, что образ v_d - проективное многообразие и v_d определяет изоморфизм на свой образ.

9 Покажите, что $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ является проективным многообразием (постройте замкнутое вложение в $\mathbb{P}^{nm+n+m}$, оно называется вложением Сегре). Верно ли, что образ этого отображения не содержится ни в какой гиперплоскости.

10 Используя отображение Веронезе, докажите, что любые две кривые в $\mathbb{P}^2$ пересекаются.

11 Покажите, что прямая с двойной точкой (склейка двух копий аффинных прямых по подмножествам $\mathbb{A}^1 \setminus 0$ с помощью тождественного морфизма) не является отделимой схемой. (Опишите диагональ с помощью универсального свойства).

12 Пусть $f : X \to Y$ морфизм алгебраических схем, причем Y отделима. Определите график морфизма с помощью универсального свойства. Покажите, что он получается заменой базы из морфизма диагонали. Покажите, что он замкнут и опишите его уравнениями в случае аффинных многообразий $f : SpecA \to SpecB$ (начала опишите его идеал в $A \otimes B$ как ядро морфизма $a \otimes b \to af^*(b)$, затем опишите уравения, как в случае диагонали).

13 Покажите, что в отделимой схеме пересечение двух открытых аффинных подмножеств также аффинно (реализуйте их пересечение как пересечение с диагональю).

14 Покажите, что образ полного многообразия, также является полным многообразием.