

Алгебра Ивахори - Гекке

§ 1. Определение и фактор.

Def Алгебра Ивахори - Гекке (Iwahori-Hec обозначаемая $H_n(q)$, задаётся в терминах генераторов $g_i, i=1, \dots, n-1$, и соотношений

$$\left\{ \begin{array}{l} g_i g_j = g_j g_i \quad \forall |i-j| > 1, \end{array} \right. \quad (1a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}, \end{array} \right. \quad (1b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g_i^2 = 1 + (q - q^{-1}) g_i. \end{array} \right. \quad (1c)$$

Мы будем рассматривать эту алгебру над полем \mathbb{C} и считать, что параметр алгебры q — отличен от 0 комплексное число: $q \in \mathbb{C}^*$.

Rem 1: Формулы (1a, b) совпадают с соотношениями на артиновых генераторов группы кос B_n . Поэтому $H_n(q)$ — это фактор-алгебра групповой алгебры $\mathbb{C}[B_n]$ по двустороннему идеалу, порождённому соотношением (1c), то есть элементы $H_n(q)$ это классы элементов $\mathbb{C}[B_n]$ вида:

$$H_n(q) \ni [x] = \underbrace{x + \mathbb{C}[B_n] (v_1^2 - (q - q^{-1}) v_1 - 1) \mathbb{C}[B_n]}_{\mathbb{C}[B_n]}.$$

В этой формуле вместо v_1 можно использовать (2)
↑ артиков генератор v_i , поскольку все они сопряжены
в V_n . В частности, $g_i = [v_i]$.

Рем 2 Алгебры $H_n(q)$ часто называют алгебрами
Текке серии A_{n-1} . Для каждой группы кос,
задаваемой по графу (см. упр. 7 задания к 1-й теме)
можно определить её алгебру Текке, налагая
квадратичные соотношения на её артиковые генера-
торы. Таким образом получаются различные серии
алгебр Текке.

Мы будем для краткости называть $H_n(q)$ алгеб-
рами Текке.

Приведём список фактов об
алгебрах $H_n(q)$. Часть из них мы докажем
сразу. Оставшиеся будут доказаны в процес-
се изучения представлений алгебр Текке.

Факт 1:

$$\dim H_n(q) = n! \quad (2)$$

Сейчас мы обоснуем, что $\dim H_n(q) \leq n!$,
для чего используем цепочку вложений алгебр
 $H_i(q)$, $i = 1, \dots, n$, называемую башней алгебр.

$\mathbb{C}\langle 1 = H_1(q) \subset H_2(q) \subset \dots \subset H_i(q) \subset H_{i+1}(q) \subset \dots \subset H_n(q)$

Здесь вложение $H_i(q)$ в $H_{i+1}(q)$ порождается набором генераторов g_1, \dots, g_{i-1} (т.е. все артиновы генераторы $H_{i+1}(q)$, кроме g_i).

Упр 1а: Проверьте, что $\forall x \in H_n(q)$ представим в виде $x = \alpha + \beta g_{n-1} \gamma$, где

α, β, γ - некоторые элементы $H_{n-1}(q)$. Иными словами:

$H_n(q) = H_{n-1}(q) \oplus H_{n-1}(q) g_{n-1} H_{n-1}(q)$

Упр 1б: Воспользовавшись результатами Упр 1а и индукцией по n , докажите, что каждый элемент $H_n(q)$ может быть представлен как линейная комбинация элементов вида

$x_{i_1 i_2 \dots i_n} := c_{i_1 i_1} c_{i_2 i_2} \dots c_{i_n i_n}$, $i_k \in \{1, 2, \dots, k\}$.

где $c_{ij} = g_{j-1} g_{j-2} \dots g_i \forall i < j$, $c_{ii} := 1$.

Набор $\{x_{i_1 \dots i_n}\}$ содержит $n!$ элементов, но поскольку мы не можем утверждать их линейной независимости, результат Упр 1б означает лишь, что

$\dim H_n(q) \leq n!$ (3)

Факт 2: Очевидно $H_n(1) = H_n(-1) = \mathbb{C}[S_n]$. (4)

Оказывается:

$$H_n(q) \cong \mathbb{C}[S_n] \quad \left(\begin{array}{l} \text{кроме случаев} \\ q = \pm 1 \end{array} \right) \quad (4)$$

для $q \in \mathbb{C}^\times$: $q^{2k} \neq 1$, $k=2, 3, \dots, n$

Это утверждение (в более общем виде) было доказано Дж. Люстигом / George Lusztig, J. of Algebra, v. 71 (1981) pp. 490-498/.

В силу теоремы Машке изоморфизм (4) означает, что алгебра $H_n(q)$, при указанных условиях на q , полупроста, а значит можно классифицировать ее неприводимые представления.

Везде далее при рассмотрении неприводимых представлений $H_n(q)$ мы предполагаем выполнение условий (4) на q .

Факт 3. Так же, как и в группе кос B_n , элементы Юнга - Мёрфи

$$J_1 = 1, J_2 = g_1^2, J_{i+1} = g_i J_i g_i \quad i=2, \dots, n-1 \quad (5)$$

порождают коммутативную подалгебру в H_n

$$\left. \begin{array}{l} \text{Эта коммутативная подалгебра} \\ H_n(q) \text{ максимальна} \end{array} \right\} \quad (6)$$

Под максимальной мы будем понимать

не просто отсутствие в $M_n(q)$ большей (5) коммутативной подалгебры, содержащей все элементы T_i , $i=1, \dots, n$, но не порожденной ими

Def: Мы называем коммутативную подалгебру M

- алгебры A максимальной, если
- в A неприводимом представлении алгебры A \exists базис, в котором все элементы M представляются диагональными матрицами;
 - в этом базисе \nexists двух векторов, у которых собственные значения всех элементов M совпадают. Иными словами, M различает все элементы базиса.

Мы даём это определение для случая полупростых алгебр A , когда набор неприводимых представлений полностью характеризует алгебру.

Rem 3: Максимальная коммутативная подалгебра не является коммутативной подалгеброй максимальной возможной размерности (придумайте пример коммутативной подалгебры в $Mat_n(\mathbb{C})$ размерности большей n).

Rem 4: Формулы (5) не подходит для определения элементов Юнга-Мёрфи в случае

симметрической группы $\mathcal{O}[S_n] \cong H_n(\pm 1)$. (6)

При $q = \pm 1$ $J_i = 1 \forall i$ - набор вырождается.

В этом случае следует использовать набор

$$j_i = \frac{J_i - 1}{q - q^{-1}}, \quad i = 1, \dots, n \quad (5a)$$

Упр 2: Представьте j_i в виде многочленов от артиновых генераторов g_i . В случае $q = \pm 1$ представьте j_i как линейные комбинации транспозиций (jk) .

Набор $\{j_i\}$ для S_n был предложен Юнсом и Мёрфи

Факт 4: Очевидно, центр алгебры принадлежит ее максимальной коммутативной подалгебре. В случае $H_n(q)$ ее центр совпадает с алгеброй симметрических многочленов от элементов Юнса-Мёрфи:

$$Z(H_n(q)) = \text{Sym}(J_1, J_2, \dots, J_n) \quad (7)$$

Может сейчас убедиться, что $\text{Sym}(J_1, \dots, J_n) \subset Z(H_n(q))$

Упр 3: Проверьте выполнение следующих соотношений в алгебре Гекке:

$$\begin{cases} [g_i, J_k] = 0 & \forall i \neq k, k-1 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} [g_i, J_i J_{i+1}] = 0 \\ [g_i, J_i + J_{i+1}] = 0 \end{cases} \quad \forall i = 1, \dots, n-1 \quad (8)$$

С использованием этих соотношений докажите

$$[g_i, \text{Symm}(J_1, \dots, J_n)] = 0,$$

откуда следует, что $\text{Symm}(J_1, \dots, J_n) \in \mathbb{Z}(H_n(\mathfrak{g}))$.

§ 2. Неприводимые представления $H_n(q)$ (Ф)

I. Спектр элементов Юриса-Мэрри.

Построение неприводимых представлений $H_n(q)$ мы начнем с изучения возможных собственных значений набора операторов $\{J_i\}_{i=1, \dots, n}$ в этих представлениях. Сделаем следующее предположение:

Неприводимое представление V алгебры $H_n(q)$ имеет базис $\{\psi_\alpha\}$, в котором элементы Юриса-Мэрри действуют диагонально:

$$J_i \psi_\alpha = a_i \psi_\alpha \quad \forall i=1, \dots, n \quad \forall \alpha \quad (1)$$

В конце концов мы убедимся, что этому условию удовлетворяют все неприводимые представления $H_n(q)$. Чуть забегая вперед, мы представим индекс α базисных векторов в виде набора собственных значений элементов JM:

$$\alpha = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \quad (1a)$$

Это корректно, если набора $\{a_i\}_{i=1, \dots, n}$ размещают базисные вектора ψ_α .

Теорема 1. В предположении $(*)$ для (9)
 всякого базисного вектора v_α верны утверждения:

(a) $\underline{a_i \neq a_{i+1} \quad \forall i}$

(б) если $\underline{a_i \neq q^{\pm 2} a_{i+1}}$, то $\exists v_{\alpha'} \in V$,
 где $\alpha' = \sigma_i \alpha = (a_1, \dots, \underbrace{a_{i+1}, a_i}_{i\text{-я и } (i+1)\text{-я позиции}}, \dots, a_n)$

(в) если $\underline{a_{i+1} = q^{\pm 2} a_i}$, то $\nexists v_{\alpha'} \in V$,
 такого что $\alpha' = \sigma_i \alpha$. При этом

$$\underline{g_i v_\alpha = q^{\pm 1} v_\alpha}$$

(2) в базисе $\{v_\alpha\}$ нет двух векторов с одинаковыми наборами $\{a_i\}_{i=1, \dots, n}$, то есть представление (1a) корректно.

Доказательство:

а) Предположим $a_i = a_{i+1} = a$, т.е. $J_i v_\alpha = J_{i+1} v_\alpha = a v_\alpha$

С учётом: $J_{i+1} = g_i J_i g_i^{-1}$ и $g_i^{-1} = g_i - (q - q^{-1}) \mathbb{1}$
 преобразуем:

$$g_i J_i v_\alpha = J_{i+1} g_i^{-1} v_\alpha = \underline{J_{i+1} g_i v_\alpha - (q - q^{-1}) a v_\alpha}$$

С другой стороны:

$$g_i J_i v_\alpha = \underline{a g_i v_\alpha}, \text{ откуда заключаем}$$

$$\boxed{(J_{i+1} - aI)(g_i v_\alpha) = (q - q^{-1}) a v_\alpha} \quad (\star) \quad (10)$$

Вектор $g_i v_\alpha \in V$ можно разложить по базису $\{v_\beta\}$.
 Под действием оператора $(J_{i+1} - aI)$ в этом разложении пропадет вектор v_α . В правой же части (\star) вектор v_α присутствует с ненулевым коэффициентом (мы работаем со случаем $q \neq \pm 1$). Получим противоречие

б) Рассмотрим вектор

$$\boxed{\omega = \left(g_i + \frac{(q - q^{-1}) a_{i+1}}{a_i - a_{i+1}} 1 \right) v_\alpha} \quad (2)$$

Посмотрим, как на него действуют J_i и J_{i+1} :

$$\begin{aligned} J_i \omega &= g_i^{-1} J_{i+1} g_i^{-1} \left(g_i + \frac{(q - q^{-1}) a_{i+1}}{a_i - a_{i+1}} 1 \right) v_\alpha = \\ &= a_{i+1} g_i^{-1} v_\alpha + \frac{(q - q^{-1}) a_i a_{i+1}}{a_i - a_{i+1}} v_\alpha = \\ &= a_{i+1} g_i v_\alpha + (q - q^{-1}) \left(\frac{a_i a_{i+1}}{a_i - a_{i+1}} - a_{i+1} \right) v_\alpha \\ &= a_{i+1} \omega \end{aligned}$$

Аналогично:

$$J_{i+1} \omega = a_i \omega.$$

Очевидно также, что $J_k \omega = a_k \omega \quad \forall k \neq i, i+1.$

Таким образом мы построили $U_2' = \Omega$, $\alpha' = \sigma_i \alpha$. (11)

Для того, чтобы доказать оставшиеся пункты теоремы, нам потребуется

Лемма: Рассмотрим подпространство $U \subset V$, являющееся линейной оболочкой всех базисных векторов U_β , на которых элемент J_n принимает одинаковое собственное значение a :

$$U = \text{Span}(U_\beta \in \{U_\alpha\} : J_n U_\beta = a U_\beta).$$

U является инвариантным пространством относительно действия $H_{n-1}(g) \subset H_n(g)$. Представление $H_{n-1}(g)$ на U неприводимо.

Доказательство: Инвариантность U относительно действия $H_{n-1}(g)$ следует из коммутативности J_n с генераторами g_i , $i=1, \dots, n-2$.

Неприводимость представления U докажем от противного. Предположим, что \exists подпространство $U' \subset U$, $U' \neq U$: $H_{n-1}(g)U' = U'$.

Поскольку V - неприводимое представление $H_n(g)$, то для $U' \subset V$ имеем $H_n U' = V \supset U$.

С другой стороны

$$H_n U' = (H_{n-1} \oplus H_{n-1} g_{n-1} H_{n-1}) U' = U' \oplus H_{n-1} g_{n-1} U'$$

При доказательстве пункта б) Теорема 1 мы

получили формулу (см. (2)):

(12)

$$g_i U_\alpha = U_{\sigma_i \alpha} + \frac{(q - q^{-1}) a_{i+1}}{a_{i+1} - a_i} U_\alpha \quad (2a)$$

Если в качестве базиса в U' выбрать набор собственных векторов элементов $J_i, i=1, \dots, n-1$, то, применяя (2a) к этому базису, получим

$$g_i U' \subset W \oplus U'$$

Здесь W - линейная оболочка векторов $\{U_{\sigma_{n-1} \alpha}\}$, где $\{U_\alpha\}$ - базис в U' . В силу пункта а) теоремы 1 собственное значение J_n на этих векторах $\neq a$, и значит $W \cap U = 0$.

Важное замечание: чтобы использовать базис собственных векторов элементов J_M в неприводимом представлении U' алгебры $H_{n-1}(q)$ нам придётся считать, что процедура построения неприводимых представлений уже проведена для $H_{n-1}(q)$; все факты, перечисленные в §1, для неё уже доказаны. В частности, верен Факт 3, которым мы и пользуемся.

Таким образом, мы строим представления для алгебр Гекке индуктивно: последовательно для H_2, H_3, \dots
 H_n . База индукции: 2-мерной абелевой алгебры $H_2(q)$ имеется 2 одномерных неприводимых представлений. Для них все наши утверждения очевидны.

Продолжаем: поскольку J_n коммутирует с \forall элементами $H_{n-1}(q)$, имеем: $H_{n-1} W \cap U = 0$.

Таким образом

(13)

$$H_n U' \cap U = (U' \oplus H_{n-1} W) \cap U = U' \cap U \neq U, \text{ а значит } H_n U' \neq V. \text{ Получили противоречие } \blacksquare$$

Приступим к доказательству пункта б) теоремы.

Пусть для определенности $a_{i+1} = q^2 a_i$.

Предположим, что вектор ω из формулы (2) нетривиален.

$$\omega \Big|_{a_{i+1} = q^2 a_i} = (g_i - q^1) \sigma_\alpha \neq 0. \quad (25)$$

В силу Леммы (применяемой последовательно к представлениям алгебр $H_n \subset H_{n-1} \subset \dots \subset H_{i+1}$) представление алгебры Гекке $H_{i+1}(q)$, порожденное вектором $\omega - H_{i+1}(q)\omega$ неприводимо. Оно содержит все векторы базиса $\{\sigma_\alpha\}$ пространства V , для которых собственные значения элементов J_{i+2}, \dots, J_n совпадают с их собственными значениями на ω . Следовательно, должно быть

$$\sigma_\alpha \in H_{i+1}(q)\omega.$$

Однако, формула (25) и условие Гекке для g_i делают $\omega \Big|_{a_{i+1} = q^2 a_i}$ собственным вектором g_i :

$$g_i \left(\omega \Big|_{a_{i+1} = q^2 a_i} \right) = -q^{-1} \omega \Big|_{a_{i+1} = q^2 a_i}, \quad (3)$$

а значит, породить σ_α из ω действием g_i не получается. Мы убедились, что и действие всей

$H_{i+1}(q)$ на $\omega \Big|_{a_{i+1} = q^2 a_i}$ не порождает σ_α .

$$\text{Действительно: } H_{i+1} \omega|_{\dots} = (H_i \oplus H_i g_i H_i) \omega|_{\dots} \quad (14)$$

Однако $\forall \varphi \in H_i \omega|_{\dots}$, $J_{i+1} \varphi = a_i \varphi$ (как и для $\omega|_{\dots}$)

а для v_α : $J_{i+1} v_\alpha = a_{i+1} v_\alpha$. Поэтому $v_\alpha \notin H_i \omega|_{\dots}$.

Осталось разобраться с $H_i g_i H_i \omega|_{\dots}$. Согласно (2a)

$$H_i \omega|_{\dots} \subset \mathbb{C} \omega|_{\dots} \oplus \text{Span} \{ v_\beta \in V : J_i v_\beta = b v_\beta, J_{i+1} v_\beta = a_i v_\beta, b \neq q^2 a_i \}.$$

Поэтому

$$g_i H_i \omega|_{\dots} \subset \text{Span} \{ v_\beta \in V : J_{i+1} v_\beta = \underline{a_i} v_\beta \text{ или } J_{i+1} v_\beta = b v_\beta, b \neq q^2 a_i \}$$

Тут мы ушли и действие g_i на ω (3).

Поскольку действие H_i коммутативно с J_{i+1} , ^{затемогали,} что среди векторов $H_i g_i H_i \omega|_{\dots}$ нет таких φ , что $J_{i+1} \varphi = a_{i+1} \varphi$.

Следовательно $v_\alpha \notin H_i g_i H_i \omega|_{\dots}$.

Мы получили противоречие, которое разрешается требованием $\omega|_{\dots} = 0$, то есть

$$\underline{g_i v_\alpha = q v_\alpha} \quad (4)$$

Убедимся теперь, что $\nexists v_{\beta: \alpha} \in V$. Действительно, если такой вектор есть, то, согласно Лемме,

$v_{\beta: \alpha} \in H_{i+1} v_\alpha$. Однако свойство (4) вектора v_α

этому противоречит. Доказательство проводится

так же, как мы только что доказывали,

что (3) $\Rightarrow \sigma_2 \notin H_{n+1}(\omega)$.

Пункт в) теорема доказана.

Утверждение 2) теоремы следует из Леммы и предположения индукции о том, что теорема выполняется для $H_{n-1}(q)$ (см. замечание на стр 12). \square

Итак, с точностью до благополучного завершения индукции по n , мы докажем корректность представления индексов векторов σ_2 в виде (1a). Мы будем им далее пользоваться.

Попуражнемся в вычислении возможных значений индексов α .

Поскольку $J_1 = 1$, очевидно, $a_1 = 1 \neq \sigma_2$. Отсюда, и из пунктов б), в) теоремы следует, что

$$a_i \in \{q^{2k}, k \in \mathbb{Z}\} \quad \forall i \neq \sigma_2.$$

Для $H_2(q)$: имеем 2 вектора σ_2 с индексами

$$\alpha_1 = (1, q^2) \text{ и } \alpha_2 = (1, q^{-2}),$$

так как $D_2 = d_1^2$ имеет 2 собственных значения $q^{\pm 2}$.

У абелевой 2-мерной алгебры $H_2(q)$ при условии $q^2 \neq -1$ (ср. с (4) на стр. 4.) есть 2 различных одномерных представления, отвечающих индексам α_1 и α_2 . Алгебра полупроста.

Упр 4. Убедитесь, что в случае $q^2 = -1$, алгебра ⁽¹⁶⁾

$M_2(q)$ изоморфна неполупростой алгебре верхнетреугольных 2×2 матриц вида

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{C}.$$

Для $M_3(q)$ пунктам а), б), в) теоремы удовлетворяют индексы

$$\alpha_1 = (1, q^2, q^4) \quad \alpha_2 = (1, q^{-2}, q^{-4})$$

$$\alpha_{3a} = (1, q^2, q^{-2}) \quad \alpha_{3b} = (1, q^{-2}, q^2)$$

$$\alpha_4 = (1, q^2, 1) \quad \alpha_5 = (1, q^{-2}, 1)$$

Однако случаи α_4 и α_5 не реализуются. Действительно, например для σ_{α_4} из пункта в) теоремы следует

$$g_1 \sigma_{\alpha_4} = q \sigma_{\alpha_4}, \quad g_2 \sigma_{\alpha_4} = -q^{-1} \sigma_{\alpha_4}, \quad \text{что}$$

противоречит соотношению $g_1 g_2 g_1 = g_2 g_1 g_2$ (полагая $q^2 \neq -1$).

Индексы α_1 и α_2 отвечают двум одномерным представлениям $M_3(q)$. Вектора $\sigma_{\alpha_{3a}}$ и $\sigma_{\alpha_{3b}}$ могут породить 2-мерное неприводимое представление, так как значения центральных в $M_3(q)$ симметричных многообразий от J_1, J_2, J_3 на них совпадают (см. факт 4, стр. 6). Нам в этом еще предстоит убедиться.

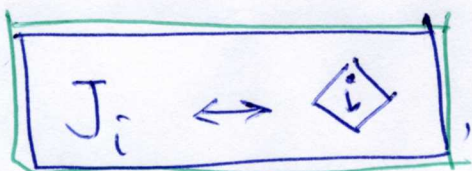
Развивая эти рассуждения, сформулируем (17)
 правила построения индексов α в $H_n(q)$:

Правило: $\alpha = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ — допустимый индекс вектора $v_\alpha(1)$ если, и только если

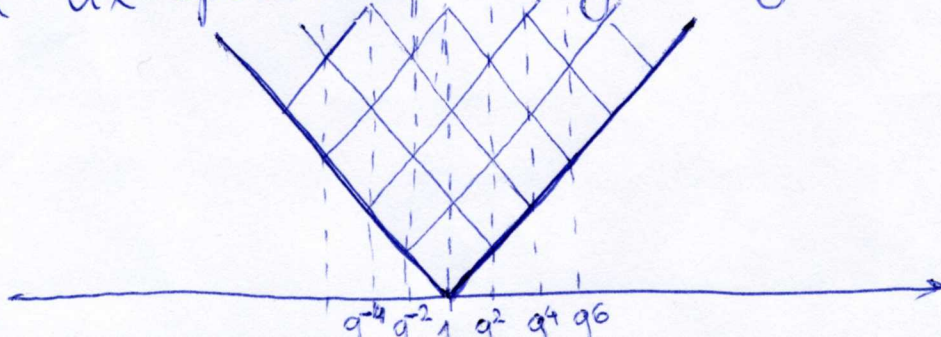
- ① $a_1 = 1$,
- ② $\forall i \{a_i q^2, a_i q^{-2}\} \cap \{a_1, a_2, \dots, a_{i-1}\} \neq \emptyset$,
- ③ $\forall i, j: i < j, a_i = a_j = a$
 $\exists k, l: i < k < j, i < l < j, a_k = q^2 a, a_l = q^{-2} a$.

Упр 5. Докажите правило, используя теорему 1 и разобранный пример $H_3(q)$.

Это правило соответствует алгоритму построения стандартных таблиц Юнга. Действительно, сопоставим элементам JM номерované клетки



и будем их бросать в яму вида:

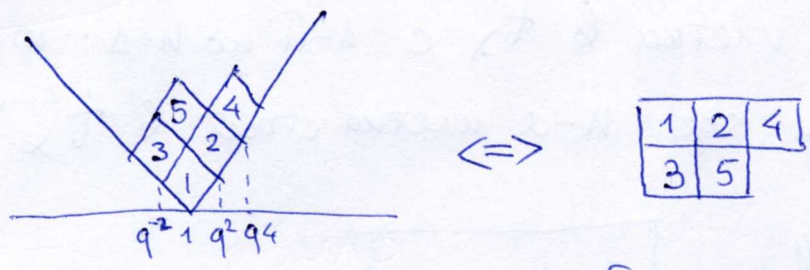


Клетки бросаем последовательно по возрастанию номеров, начиная с $\diamond 1$. Они должны опускаться строго вдоль вертикальных линий.

Первая клетка должна попасть в минимум λ — позицию с координатой 1.

Вторая клетка должна опустаться в один из образовавшихся локальных минимумов, то есть на позиции с координатами q^2 или q^{-2} .

И так далее: каждая следующая клетка должна попасть в локальный минимум образовавшейся уже конфигурации. Получившиеся конфигурации являются стандартными таблицами Юнга:



Координата вертикальной линии, вдоль которой опускается клетка $\diamond i$ называется содержанием (content) клетки. Она совпадает с собственным значением a_i оператора J_i на соответствующем векторе ψ_λ . Например, нарисованной выше конфигурации клеток соответствует вектор с индексом $\lambda = \{1, q^2, q^{-2}, q^4, 1\}$:

$$\psi_\lambda = \psi_{\{1, q^2, q^{-2}, q^4, 1\}} = \psi_{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline \end{array}}$$

Таким образом, по всякой стандартной таблице (19) Юнга t_λ , отвечающей разбиению $\lambda + n$ (оно же — диаграмма Юнга), однозначно восстанавливается допустимый согласно Правилу собственный вектор σ_{t_λ} элементов JM $T_i, i=1, \dots, n$.

И наоборот, индукцией по n убеждаемся, что допустимый индекс λ , конструируемый по Правилу, обязательно соответствует стандартной таблице.

Ещё одно важное наблюдение: как уже было отмечено при обсуждении допустимых индексов λ для $H_3(q)$ (см. стр. 16), векторы σ_{t_λ} и $\sigma_{t'_{\lambda'}}$, где $\lambda, \lambda' + n$

а) не могут принадлежать одному представлению V , если $\lambda \neq \lambda'$ (факт 4 + условия на q из факта 2 + лемма Шура)

б) появляются вместе в представлении V , если $\lambda = \lambda'$ (индукция по n + лемма + пункт б) Теоремы 1)

Таким образом, неприводимые представления V алгебры

$H_n(q)$ можно "нумеровать" разбиениями $\lambda + n$, а базисные вектора в них — стандартными таблицами $t_\lambda, \lambda + n$

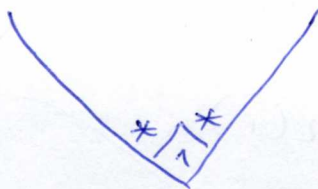
Правило построения допустимых индексов α (20) даёт нам способ построения полиномов из элементов Юнга-Мёрфи, которые принадлежат ядру (тождественно записываются) в любом рассматриваемом нами представлении V .

Доказав, что наша процедура перечисляет все неприводимые представления полупростой алгебры $H_n(q)$, мы убедились, что эти полиномы тождественно записываются в алгебре $H_n(q)$, т.е. являются характеристическими тождествами для подалгебр элементов JM. Действительно, в $H_n(q)$ (в отличие от $\mathbb{C}[B_n]$) подалгебра, порождаемая элементами $J_i, i=1, \dots, n$, должна быть коммутативной, а значит в ней должны быть полиномиальные тождества на J_i . Мы их построим индуктивно по n :

$$\text{В } H_1(q) \quad \boxed{J_1 - 1 = 0} \text{ - очевидно } \Leftrightarrow \boxed{1}$$

$$\text{В } H_2(q) \quad \boxed{(J_2 - q^2)(J_2 - q^{-2}) = 0} \text{ - это условие (5) Гекке.}$$

Это тождество мы графически интерпретируем как возможность положить клетку $\langle 2 \rangle$ в одно из двух мест:



с контактами q^2 и q^{-2} .

Прежде, чем перейти к рассмотрению $H_3(q)$ обратим внимание, что соотношение (5) позволяет нам построить разложение единицы алгебры $H_2(q)$ в сумму взаимно-ортогональных идемпотентов (проекторов) / кирсовское разложение единицы /:

$$P_{\begin{array}{|c|} \hline \boxed{2} \\ \hline \end{array}}^+ = \frac{J_2 - q^2}{q^{-2} - q^2} \begin{array}{l} \leftarrow \text{контакт помеченной "x" \\ клетки, куда не попала} \diamond \\ \leftarrow \text{контакт клетки, куда попала} \\ \diamond \end{array}$$

$$P_{\begin{array}{|c|} \hline \boxed{1} \\ \hline \end{array}}^+ = \frac{J_2 - q^{-2}}{q^2 - q^{-2}} \diamond$$

$$P_{\begin{array}{|c|} \hline \boxed{2} \\ \hline \end{array}} P_{\begin{array}{|c|} \hline \boxed{1} \\ \hline \end{array}} = 0, \quad P_{\begin{array}{|c|} \hline \boxed{2} \\ \hline \end{array}}^2 = P_{\begin{array}{|c|} \hline \boxed{2} \\ \hline \end{array}}, \quad P_{\begin{array}{|c|} \hline \boxed{1} \\ \hline \end{array}}^2 = P_{\begin{array}{|c|} \hline \boxed{1} \\ \hline \end{array}}$$

$$P_{\begin{array}{|c|} \hline \boxed{2} \\ \hline \end{array}} + P_{\begin{array}{|c|} \hline \boxed{1} \\ \hline \end{array}} = 1$$

Обратим внимание, что мы не при всяких значениях q можем нормировать проекторы $P_{\begin{array}{|c|} \hline \boxed{2} \\ \hline \end{array}}$ и $P_{\begin{array}{|c|} \hline \boxed{1} \\ \hline \end{array}}$.

Требуется $q^4 \neq 1$, или $\underline{[2]_q = q + q^{-1} \neq 0}$ (если исключить случаи $q = \pm 1$, отвечающие симм. группе S_2).

Так появляются условия полупростоты. При $[2]_q = 0$

проекторов $P_{\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}}, P_{\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}}$ некорримируемо, построить (22)
 ирсовское разложение единиц в $H_2(q)$ не удаётся,
 и $H_2(q)$ не полупроста.

Перейдём к $H_3(q)$. Характеристические тождества
 строятся так:

$$\begin{array}{l} \begin{array}{|c|c|} \hline * & * \\ \hline \end{array} \\ \Rightarrow P_{\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}} \cdot (J_3 - q^2)(J_3 - q^{-4}) \equiv 0 \quad (7a) \\ \text{или} \\ (J_2 - q^2)(J_3 - q^2)(J_3 - q^{-4}) \equiv 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \begin{array}{|c|c|} \hline * & * \\ \hline \end{array} \\ \Rightarrow P_{\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}} (J_3 - q^4)(J_3 - q^{-2}) \equiv 0 \quad (7b) \\ \text{или} \\ (J_2 - q^{-2})(J_3 - q^{-2})(J_3 - q^4) \equiv 0 \end{array}$$

Возникло 2 новых тождества, по одному для каж-
 дого проектора μ $H_2(q)$. Они порождают новое
 проектора:

$$\begin{array}{l} P_{\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}} = P_{\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}} \cdot \frac{J_3 - q^2}{q^{-4} - q^2} \\ P_{\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}} = P_{\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}} \cdot \frac{(J_3 - q^{-4})}{q^2 - q^{-4}} \end{array}$$

коммент, помеченной "x" 4
 клетки, куда могла встать
 но не встала $\diamond 3$

коммент клетки, куда встала $\diamond 3$

эти 2 идемпотента происходят из тождества (7a)

$$P_{\begin{smallmatrix} + \\ 123 \end{smallmatrix}} = P_{\begin{smallmatrix} \\ 12 \end{smallmatrix}} \cdot \frac{J_3 - q^{-2}}{q^4 - q^{-2}}$$

$$P_{\begin{smallmatrix} 3 \\ 12+ \end{smallmatrix}} = P_{\begin{smallmatrix} \\ 12 \end{smallmatrix}} \cdot \frac{J_3 - q^4}{q^{-2} - q^4}$$

- эти идемпотенты строятся по тождеству (78)

Свойства построенных идемпотентов:

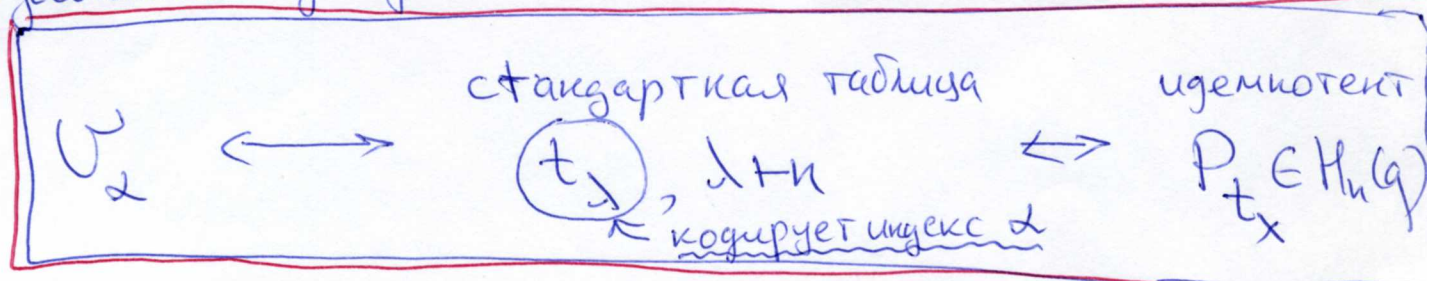
*) $P_{\begin{smallmatrix} 32 \\ 1 \end{smallmatrix}} + P_{\begin{smallmatrix} 2 \\ 13 \end{smallmatrix}} = P_{\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}}$; $P_{\begin{smallmatrix} 123 \\ \\ \end{smallmatrix}} + P_{\begin{smallmatrix} 3 \\ 12 \end{smallmatrix}} = P_{\begin{smallmatrix} \\ 12 \end{smallmatrix}}$

***) $P_t \cdot P_s = \delta_{t,s} P_t$,
 где $t, s \in \left\{ \begin{smallmatrix} 32 \\ 1 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 2 \\ 13 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 3 \\ 12 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 123 \\ \\ \end{smallmatrix} \right\}$

⇓
 Четверка построенных идемпотентов дает кирсовское разложение единицы в алгебре $H_3(q)$

Упражнение 5 Для каждого μ идемпотента в $H_3(q)$ постройте тождество для элементов Юнга-Мэя в $H_4(q)$. По этим тождествам постройте кирсовское разложение единицы в $H_4(q)$

В конце коцов для $H_n(q)$ мы получаем взаимно-однозначные сопоставления



привели, если $\alpha = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, то есть

$$J_i v_\alpha = a_i v_\alpha,$$

то

$$J_i P_{t_\lambda} = P_{t_\lambda} J_i = a_i P_{t_\lambda}$$

откуда следует, что идемпотент P_{t_λ} является проектором на вектор v_{t_λ} :

$$P_{t_\lambda} v = \mathbb{C} v_{t_\lambda}, \text{ если } v_{t_\lambda} \in v$$

$$P_{t_\lambda} v = 0, \text{ если } v_{t_\lambda} \notin v$$

При этом в одном и том же пространстве V нетривиально могут действовать лишь проекторы, отвечающие одной и той же диаграмме Юнга.

Идемпотенты P_{t_λ} ортонормированы и примитивны (поскольку проецируют на одномерные подпространства). Они задают курсовое разложение единицы в $H_n(q)$: $\sum_{t_\lambda, \lambda \vdash n} P_{t_\lambda} = 1$.

Рез: при построении идемпотентов P_{t_λ} приходится исключать значения q , при которых в знаменателях идемпотентов появляются нули (т.е. совпадающие корни в характеристических тождествах вида J_i). Это как раз условия

полупростота алгебры $H_n(q)$ (см. факт 2). (25)

Реш: Полупростота алгебры над \mathbb{C} (по теореме Веддербера-Артина) изоморфна прямому произведению простых матричных алгебр, т.е. алгебрам блочко-диагональных матриц. При этом построенные нами идемпотенты можно считать прообразами диагональных матричных единиц — матриц с единичным ненулевым элементом — единицей где-то на ее диагонали.

Пример: Предложенная схема задаёт изоморфизм $H_3(q)$ с алгеброй 4×4 матриц с двумя 1×1 диагональными блоками и одним 2×2 блоком

$$H_3(q) \cong \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{* \quad \cdot} & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

Построенные нами 4 идемпотента при этом изоморфизме сопоставляются четырем диагональным матричным единицам с единицами на отмеченных * местах. Два идемпотента $\mathcal{P}_{\begin{smallmatrix} 2,3 \\ 1 \end{smallmatrix}}$ и $\mathcal{P}_{\begin{smallmatrix} 3,2 \\ 1 \end{smallmatrix}}$ располагаются в одном 2×2 блоке.

II. Негугональные матричные единицы

Мы построили серию идемпотентов в $H_n(q)$ —

P_α — аналогов диагональных матричных единиц.

Попробуем построить цепочку изоморфизм $H_n(q)$

в прямое произведение матричных алгебр, т.е.

найти формулы и для негугональных матричных единиц. Для этого изучим свойства оператора

$(g_i + \lambda \frac{a_{i+1}}{a_i - a_{i+1}} \mathbb{1})$, отображающего $V_\alpha \rightarrow V_{\alpha'}$ / см. (2) /

Переобозначим $a_{i+1}/a_i = q^{2x}$ (естественно, т.к. $a_i \in \{q^{2\mathbb{Z}}\}$)

и назовём

$$g_i(x) := \left(g_i - \frac{q^x}{[x]_q} \mathbb{1} \right) \quad (8)$$

Бахтеризованным элементом g_i . Нам потребуется

чтобы параметр x , зачастую называемый спектраль-

ный, принимал значения в \mathbb{Z} . Однако, в прило-

жениях бывает $x \in \mathbb{C}$. Название "спектральный"

для x происходит из приложений.

Свойства бахтеризованных элементов:

Лемма 2

имеем:

(a)

$$g_i(x) g_i(-x) = \frac{[x+1]_q [x-1]_q}{([x]_q)^2} \mathbb{1} \quad (9a)$$

$$\delta) \boxed{g_i(x) g_{i+1}(x+y) g_i(y) = g_{i+1}(y) g_i(x+y) g_{i+1}(x)} \quad (9\delta)$$

Соотношения (9a), (9\delta) $\forall x, y$ эквивалентны соотношениям (1\delta), (1\epsilon) на артиновом генераторе g_i, g_{i+1} из $\xi 1$.

Соотношение (9a) часто называют условием унитарности, а (9\delta) — уравнением Лэнга — Фокстера. Термин происходит из матричных моделей.

Упр 6: Докажите лемму

Выбирая подходящие значения спектрального параметра α мы используем $g_i(x)$, как в Теореме 1, для построения ^{в паре} вектору $v_\alpha \in V$ вектора

$$v_{\alpha'} \in V, \quad \alpha' = \sigma_i \alpha.$$

Выбираем $q^{2\alpha} = a_{i+1}/a_i$, тогда

— если $\alpha = \pm 1$, то $g_i(x) v_\alpha = 0$ и $\nexists v_{\alpha'} \in V$

— если $\alpha \neq \pm 1$, то зададим действие g_i на паре $v_\alpha, v_{\alpha'}$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{[x+1]_q}{[x]_q} v_{\alpha'} &= g_i(x) v_\alpha, & (10) \\ g_i(-x) v_{\alpha'} &= \frac{[x-1]_q}{[x]_q} v_\alpha \end{aligned}} \quad (\text{по Лемме 2a})$$

Мы также знаем, как P_α и $P_{\alpha'}$ действуют на базисные вектора V :

$$P_\alpha v_\beta = \delta_{\alpha\beta} v_\alpha, \quad P_{\alpha'} v_\beta = \delta_{\alpha'\beta} v_{\alpha'} \quad \forall \beta \quad (11)$$

Проследим теперь за их совместным действием:

$$(g_i(x) P_\alpha) v_\beta = \frac{[x+1]_\beta}{[x]_\beta} \delta_{\alpha\beta} v_{\alpha'} \quad \forall \beta, \quad x = \frac{a_{i+1}}{a_i}, \quad (12)$$

это очевидно следует из (10), (11), и это совпадает с действием диагональной матричной единицы

$$\frac{[x+1]_\beta}{[x]_\beta} E_{\alpha'\alpha} \text{ в } V.$$

Есть еще один оператор, действующий таким же образом:

$$(P_{\alpha'} g_i(-x)) v_\alpha = P_{\alpha'} \left(g_i(x) + \left(\frac{q^x}{[x]_q} + \frac{q^{-x}}{[x]_q} \right) 1 \right) v_\alpha =$$

$$P_{\alpha'} \left(\frac{[x+1]_q}{[x]_q} v_{\alpha'} + \frac{q^x + q^{-x}}{[x]_q} v_\alpha \right) = \frac{[x+1]_q}{[x]_q} v_{\alpha'},$$

$$(P_{\alpha'} g_i(-x)) v_{\alpha'} = P_{\alpha'} \frac{[x+1]_q [x-1]_q}{[x]_q^2} v_\alpha = 0$$

$$(P_{\alpha'} g_i(-x)) v_\beta = 0 \quad (\text{проверьте!}) \quad \beta \neq \alpha, \alpha'$$

Учитывая, что действия операторов $g_i(x) P_\alpha$ и $P_{\alpha'} g_i(-x)$ совпадают в неприводимом представлении V , содержащем векторы v_α и $v_{\alpha'}$, и

то ждественно равно 0 в остальных криво - (29)
 дилых представлениях, в предположении полупрос-
 тоты $H_n(q)$ получаем следующий результат:

Теорема 2 Для любой пары P_α и $P_{\alpha'}$ в

$H_n(q)$: $\alpha' = \sigma_i \alpha$ имеем:

Если $\alpha \neq \pm 1$, где $q^{2\alpha_i} = \frac{a_{i+1}}{a_i}$, $\alpha = \{a_1, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n\}$


то

$$g_i(\alpha) P_\alpha = P_{\alpha'} g_i(-\alpha) \quad (13a)$$

$$P_\alpha g_i(\alpha) = g_i(-\alpha) P_{\alpha'} \quad (13b)$$

Если же $\alpha = \pm 1$, то α' не является допустимым индексом $\Rightarrow \nexists P_{\alpha'}$. При этом выполняются соотношения

$$g_i(\alpha) P_\alpha = P_\alpha g_i(\alpha) = 0 \quad (13b)$$

Доказательство: рассуждения, приводящие к (13a) мы уже провели. Доказательство (13b) такое же с заменой $\alpha \leftrightarrow \alpha'$. (13b) проверяется с помощью пункта в) Теоремы 1. 

Реш: Мы видели, что образы $g_i(\alpha) P_\alpha$ и (13a) в $\text{End}(V)$ является недиагональная матрица единичца $\begin{matrix} [\alpha+1]_q \\ [x] \end{matrix} \in \alpha' \alpha$, если определить базисные векторы σ_α и $\sigma_{\alpha'}$, как в (10)

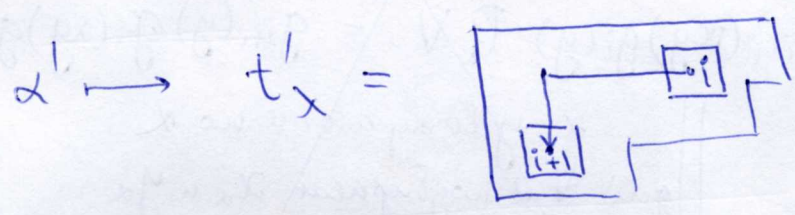
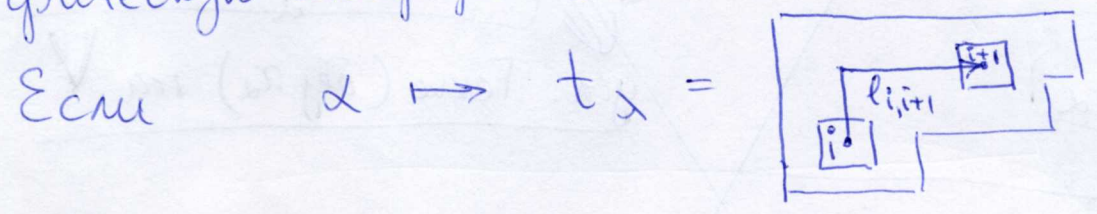
Нетрудно проверить, что образом $P_\alpha g_i(x)$

из (138) в этом же базисе будет

$$\frac{[x-1]_q}{[x]_q} E_{\alpha\alpha}$$

Таким образом мы построили прообразы канонических матричных единиц $E_{\alpha\alpha'}$, $E_{\alpha'\alpha}$, $\alpha' = \sigma_i \alpha$ в алгебре Темке (столько до их канонизации).

Параметр x в формулах (13) имеет наглядную графическую интерпретацию.



то x — это длина крюка $l_{i,i+1}$, проведенного из клетки $[i]$ в клетку $[i+1]$ (единицей длины считается размер клетки). Крюк ориентирован от $[i]$ к $[i+1]$. $l_{i,i+1}$ положительна/отрицательна, если крюк ориентирован вверх-вправо / влево-вниз. Графическая запись (13):

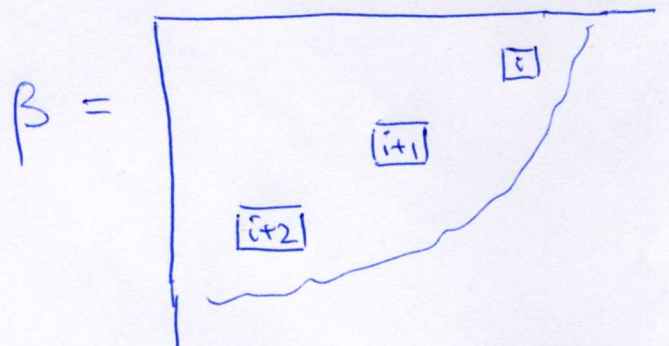
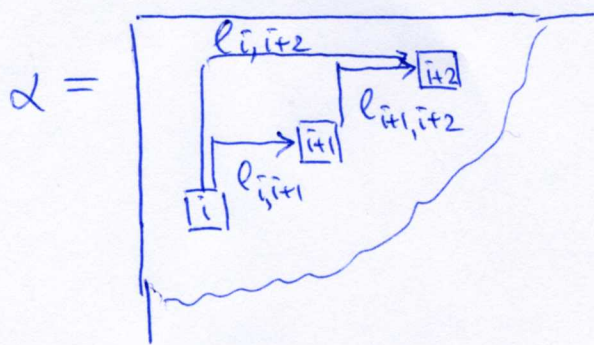
$$g_i(l_{i,i+1}) P \begin{array}{c} [i] \\ \nearrow \\ [i+1] \end{array} = P \begin{array}{c} [i+1] \\ \nwarrow \\ [i] \end{array} g_i(-l_{i,i+1})$$

$$g_i(1) P \begin{array}{c} [i] \\ \searrow \\ [i+1] \end{array} = 0, \quad g_i(-1) P \begin{array}{c} [i+1] \\ \nearrow \\ [i] \end{array}, \text{ etc.}$$

Реализовав в $K_n(q)$ преобразы кегнагональных матричных единиц из $\text{End}(V)$ мы, какже, можем построить явно представление V :

(31)

- Стартуем с \forall базисного вектора σ_{t_λ} представления V_λ .
- Строим последовательно все остальные векторы $\sigma_{t'_\lambda}$ из базиса этого представления, действуя операторами $g_i(\pm x)$, как в (10).
- Выполнение соотношений для артиновых генераторов $K_n(q)$ $g_i, i=1 \dots n-1$, удобнее проверять в их эквивалентном виде, представленном в Лемме 2 — (g_a, δ) . При этом проверка $(g\delta)$ сводится к установлению идентичности двух путей перехода от σ_α к σ_β , где



Первый способ перехода $\alpha \rightarrow \beta = (\sigma_i \cdot \sigma_{i+1} \cdot \sigma_i) \circ \alpha$ соответствует умножению проектора на $\sigma_\alpha - P_\alpha$ слева на $g_i(l_{i+1,i+2}) g_{i+1}(l_{i,i+2}) g_i(l_{i,i+1})$

Второй способ перехода $\lambda \rightarrow \beta = (\sigma_{i+1} \circ \sigma_i \circ \sigma_{i+1}) \circ \lambda$ (32)
соответствует умножению Φ_λ слева на

$$g_{i+1}(l_{i,i+1}) g_i(l_{i,i+2}) g_{i+1}(l_{i+1,i+2})$$

С учетом равенства $l_{i,i+2} = l_{i,i+1} + l_{i+1,i+2}$, уравнение Янга-Бакстера, а значит и соотношение кос выполняются для g_i, g_{i+1} .

На этом мы практически завершили построение неприводимых представлений $H_n(q)$ в ее полупростом режиме. Подготовим:

① Неприводимые представления нумеруются разбиениями $\lambda \vdash n$. Размерность представления V_λ равна числу d_λ стандартных таблиц Юнга формы λ .

Алгоритм Робинсона-Шенстеда (Robinson-Schensted) устанавливает взаимнооднозначное соответствие перестановок из S_n и пар стандартных таблиц Юнга одной формы $\lambda \vdash n$. Следовательно,

$$n! = \sum_{\lambda \vdash n} d_\lambda^2,$$

и построив неприводимые представления для всех $\lambda \vdash n$ мы докажем $\dim H_n(q) = n!$ (факт 1)

2) Построив прообразы диагональных и недиагональных матричных единиц $E_{\alpha, \beta}$ (α, β — стандартные таблицы, отвечающие одной диаграмме Юнга $\lambda \vdash n$), мы реализовали изоморфизм

$$H_n(q) \cong \times_{\lambda \vdash n} \text{Mat}(d_\lambda, \mathbb{C}).$$

Изоморфизм реализуется при условиях

$$[k]_q \neq 0, \quad k = 2, \dots, n$$

(это когда при нормировке идемпотентов P_α не возникает нулей в знаменателе).

Он означает полупростоту $H_n(q)$ и ее изоморфность $\mathbb{C}[S_n]$ (факт 2)

3) Элементы JM J_1, \dots, J_n , могут быть диагонализированы в представлениях $V_\lambda, \lambda \vdash n$, и редуцируют базисные вектора \Rightarrow элементы JM порождают максимальную коммутативную подалгебру $H_n(q)$ (факт 3).

4) Центр $H_n(q)$ совпадает с алгеброй скалярных матриц из факторов $\text{Mat}(d_\lambda, \mathbb{C})$, которые порождаются симметрическими многочленами от

J_1, \dots, J_n , Например: $1_\lambda = \sum_{t_\lambda} P_{t_\lambda}$ (факт 4).
 $t_\lambda \leftarrow$ сумма по всем станд. таблицам формы λ .

Можно строить и явные матрицы для артиковых генераторов g_i в базисе $\{\psi_\alpha\}$.

Каждая g_i в базисе $\{\psi_\alpha\}$ имеет блочно-диагональный вид с блоками размера 1×1 и 2×2 .

1×1 блок отвечает векторам ψ_α , индекс α которых имеет вид

$\alpha = \left[\begin{array}{c} i \\ i+1 \end{array} \right]$, тогда $g_i(1)\psi_\alpha = 0$, то есть

$g_i \psi_\alpha = q \psi_\alpha$

$\alpha = \left[\begin{array}{c} i \\ i+1 \end{array} \right]$, тогда $g_i(-1)\psi_\alpha = 0$, то есть

$g_i \psi_\alpha = -q^{-1} \psi_\alpha$

2×2 блок соответствуют парам векторов

$\psi_\alpha, \psi_{\alpha'} = \sigma_i \psi_\alpha$

$\alpha = \left[\begin{array}{c} i \\ i+1 \end{array} \right]$

$\alpha' = \left[\begin{array}{c} i \\ i+1 \end{array} \right]$

На этой паре g_i действует 2×2 матрицей

$g_i = \begin{pmatrix} \frac{q^e}{[e]_q} & \frac{[e-1]_q}{[e]_q} \\ \frac{[e+1]_q}{[e]_q} & -\frac{q^{-e}}{[e]_q} \end{pmatrix}, e = l_{i+1}$

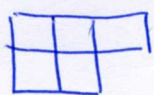
Пример: В 2-мерном представлении $H_3(q)$

(35)

V_{\boxplus} в базисе $\left\{ \sqrt{\frac{12}{3}}, \sqrt{\frac{13}{2}} \right\}$ имеем

$$g_1 = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & -q^{-1} \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} -\frac{q^{-2}}{[2]_q} & \frac{[3]_q}{[2]_q} \\ \frac{1}{[2]_q} & \frac{q^2}{[2]_q} \end{pmatrix}$$

Упр 7 Постройте явно матрицы генераторов $g_i, i=1,2,3,4$ алгебры $H_5(q)$ в представлениях, отвечающих диаграммам Юнга



и

