

§1 Элементы Юиса - Мэрри

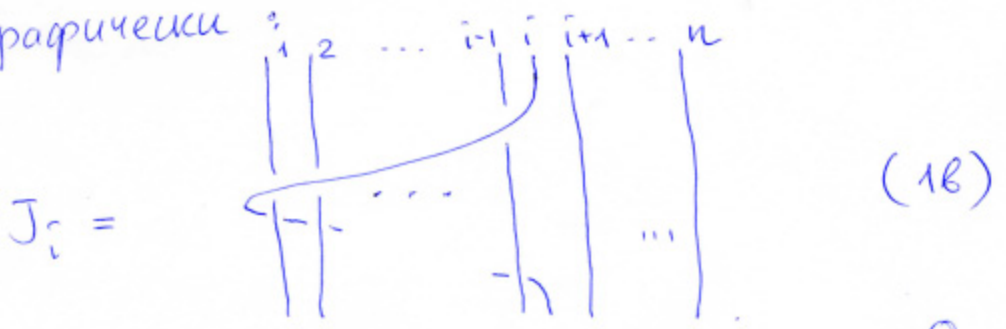
Замечательный набор элементов в группе кос $J_i, i=1, 2, \dots, n$, задаётся индуктивно:

$$\boxed{J_1 = 1, \quad J_{i+1} = v_i J_i v_i \quad i \geq 1} \quad (1a)$$

или явной формулой

$$\boxed{J_i = v_{i-1} v_{i-2} \dots v_2 v_1^2 v_2 \dots v_{i-1} v_i} \quad (1b)$$

или графически



J_i называются элементами Юиса - Мэрри. Они были введены в рассмотрение А. Юисом (А. Jucys, 1966 - 1974) и, независимо G. Murphy (1981) при изучении симметрической группы. В силу специфики симм. группы (в ней все $J_i \equiv 1$) определение, данное этим элементами Юисом и Мэрри, отлича-

лось от при ведённого выше (см. Упражнение ниже) (2)

Важнейшее свойство J_i — они коммутативны:

$$\boxed{J_i J_j = J_j J_i} \quad (2)$$

Эти они выгодно отличаются от похожих элементов A_{ij} .

Графически коммутативность вполне очевидна.

Упражнение 1: докажите (2) алгебраически, используя артиновы соотношения для v_i .

Элементы Юнга-Мёрфи порождают абелеву подгруппу $\langle \{J_i\}_{i=1, n} \rangle \subset B_n$. Она бесконечна.

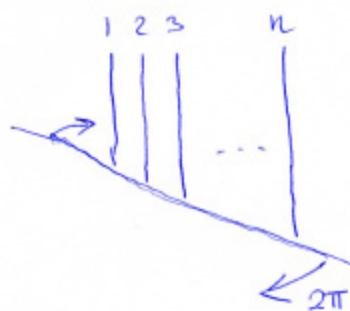
Центр группы кос $Z[B_n]$ лежит в ней:

Утверждение 1: Центр группы кос B_n , $n > 2$, порождается элементом (3)

$$\boxed{Z_n = J_1 J_2 \dots J_n} : \boxed{Z[B_n] = \langle Z_n \rangle} \quad (3)$$

/Wei-Liang Chow, 1948/

Графически ~~к~~ коса Z_n получается, если в незаплетённой косе нижние концы нитей дружно повернуть вокруг вертикали на 360° по часовой стрелке:



Графически очевидно, что $Z_n \in \mathbb{Z}[B_n]$

Упражнение 2:

а) проверьте алгебраически, что $v_i Z_n = Z_n v_i \quad \forall i=1, \dots, n-1$
т.е., что $Z_n \in \mathbb{Z}[B_n]$

б) проверьте соотношение

$$\boxed{Z_n = X_n^2 = (C_n)^n},$$

где $C_n := v_1 v_2 \dots v_{n-1}$ — n -цикл

$X_n := v_1(v_2 v_1)(v_3 v_2 v_1) \dots (v_{n-1} \dots v_2 v_1)$ — поворот нижней части расветенной кость на угол 180° .

§2 Напоминание о симметрической группе S_n ⁽⁴⁾

Симметрическая группа S_n — конечно порожденная группа B_n . Задаётся в терминах генераторов $\sigma_i, i=1, \dots, n$ — элементарных перестановок $(i, i+1)$, и соотношений.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \quad \forall |i-j| > 1 \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \\ \sigma_i^2 = 1 \end{array} \right. \quad (4)$$

Порядок группы: $\# S_n = n!$, она не — размерность ее групповой алгебры $\dim \mathbb{C}[S_n] = n!$.

Всякий элемент $x \in S_n$ (или то есть, всякий элемент линейного базиса в $\mathbb{C}[S_n]$) можно представить в виде композиции циклов

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{i_j} = \sigma_{j-1} \sigma_{j-2} \dots \sigma_i = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & i & i+1 & j & n \\ | & | & | & | & | \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \\ \text{(C}_{ii} = 1) \end{array} \right.$$

$$x = \prod_{k=1}^k C_{i_{k-1} i_k} C_{i_{k-2} i_{k-1}} C_{i_{k-3} i_{k-2}} \dots C_{i_{k-1} i_k}, \text{ где}$$

$$i_k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

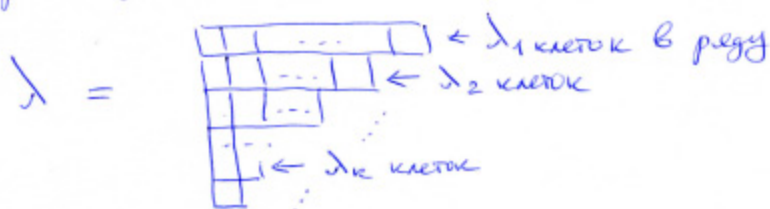
Таких элементов ровно $n!$ штук.

По теореме Малке любое представление S_n над полем F , характеристика которого не делит порядок группы (в частности, над \mathbb{C}) разлагается в прямую сумму неприводимых представлений. Иными словами, групповая алгебра $\mathbb{C}[S_n]$ полупроста. Поэтому для полного описания представлений S_n достаточно классифицировать ее неприводимые представления. Напомним эту классификацию:

Неприводимые представления S_n индексируются разбиением числа n : $\lambda + n$.

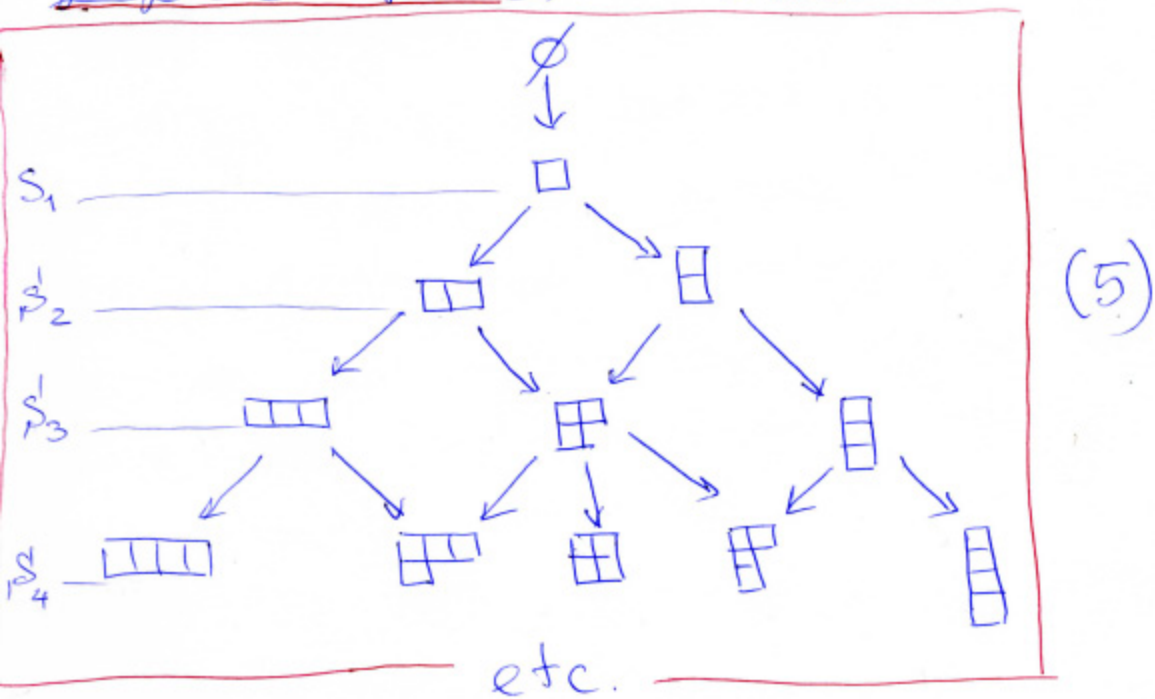
$$\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots\} : \sum_k \lambda_k = n, \lambda_i \geq \lambda_{i+1} \geq 0 \\ \lambda_i \in \mathbb{Z}$$

которые удобно рисовать в виде диаграммы Юнга:



V_λ — обозначение для неприводимого представления S_n , отвечающего разбиению $\lambda + n$.

Взаимосвязь неприводимых представлений группы S_n (для разном n) описывается, так называемой, диаграммой Братера (он же, граф ветвления):



Этот граф - набор вершин, нумерованных разбиениями λ и ориентированных рёбер между ними. В графе имеются горизонтальные уровни, нумерованные сверху-вниз: 0-й, 1-й, 2-й...

На k -ом уровне расположена вершина с k -клеточной диаграммой Юнга $(\lambda+k)$.

Эти вершины соответствуют всем неприводимым представлениям V_λ , $\lambda+k$ группы S_k .

Рёбра графа ведут с уровня k на уровень $(k+1)$. (7)

Если пара вершин графа, скажем, $\lambda+k$ и $\mu+k+1$, соединена ребром, то представление V_μ группы S_{k+1} содержит в себе представление V_λ подгруппы

$S_k \subset S_{k+1}$. (Считаем, что подгруппа S_k порождена первыми $(k-1)$ генераторами $\sigma_i, i=1, \dots, k-1$, группы S_{k+1} , т.е. всеми, за исключением σ_k). Наоборот, в представлении S_{k+1} индуцированном с представления V_λ ее подгруппы $S_k = \langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{k-1} \rangle$, содержится в качестве неприводимой компоненты V_μ .

Размерность неприводимого представления $V_\lambda, \lambda \vdash n$, группа S_n совпадает с числом разрозных путей, ведущих в графе ветвления из вершины \emptyset в вершину λ . Каждой такой путь описывается стандартной таблицей Юнга t_λ — то есть диаграммой Юнга, в клетках которой размещены числа $1, 2, \dots, n$ (каждое по 1-му разу), причем эти числа возрастают по горизонтали и вертикали при удалении от верхнего левого угла диаграммы

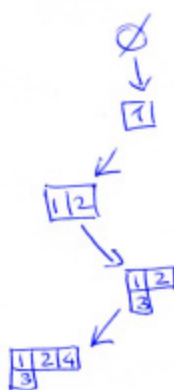
Пример:

$$\lambda \vdash 4 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}, \quad t_{\lambda(1)} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}, \quad t_{\lambda(2)} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array},$$

$$t_{\lambda(3)} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}.$$

$$\dim V_{\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}} = 3$$

Соответствие между путями на графе ветвления и стандартными таблицами Юнга опишем на примере:



Из примера становится ясным правило построения графа ветвления для \mathcal{S}_n : две диаграммы $\lambda \vdash k$ и $\mu \vdash k+1$ графа соединены ребром тогда и только тогда, когда μ получается из λ добавлением одной клетки.

Например $\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \end{array}$ и $\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}$ ребром не соединены,

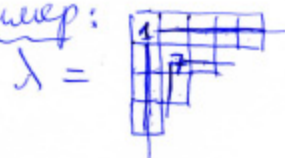
а $\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}$ и $\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \text{шaded} \\ \hline \end{array}$ соединены.

Число стандартных таблиц Юнга, отвечающих $(\textcircled{9})$ данной диаграмме $\lambda \vdash n$, оно же — размерность неприводимого представления V_λ удобно вычислить по формуле крюков (hook length formula)

$$d_\lambda = \dim V_\lambda = \frac{n!}{\prod_{i=1}^n h_{\lambda,i}} \quad (6)$$

где $h_{\lambda,i}$ — длина крюков, проведенных из всех клеток диаграммы λ (нумеруются индексом $i=1, 2, \dots, n$)

Пример:



$\lambda \vdash 11$

$h_{\lambda,1} = 8$ — длина крюка, построенного с вершиной в клетке 1 — число замкнутых или клеток диаграммы λ . (см. рис.)

$h_{\lambda,7} = 3$ (см. рис.)

$$\dim V_\lambda = \frac{11!}{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 7}{2} = 3465$$

Граф ветвления S_n удобно иллюстрирует теорему Веддерберна-Артина (Wedderburn-Artin) о полупростых алгебрах, которая в приложении к S_n (т.е. к $\mathbb{C}[S_n]$)

приводит к:

$$\dim \mathbb{C}[S_n] = n! = \sum_{\lambda \vdash n} (\dim V_\lambda)^2 \quad (7)$$

Пример: $4! = 2^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2$ — см. 4-ю строку графа ветвления.