Теория функций комплексного переменного – 2020
Листок 2

срок сдачи 06.03.2020

1. Покажите, что для комплексных функций теорема Лагранжа не выполняется: приведите пример функции $f(z)$ голоморфной на $[0,1]$ такой при всех $z \in [0,1]$ выполняется $f'(z) \neq f(1) - f(0)$.

2. Докажите, что если модуль голоморфной в области D и непрерывной в замыкании $\overline{D}$ функции f постоянен на границе ∂D, то f имеет хотя бы один ноль в D.

3. На комплексной плоскости $\mathbb{C}$ найдите выражения для переменных $z, \overline{z}$, 1-форм $dz, d\overline{z}$ и векторных полей (дифференцирований) $\partial_z, \partial_{\overline{z}}$ через координаты x, y, 1-формы dx, dy и поля ∂_x, ∂_y, найдите также обратные выражения и запишите в комплексных переменных оператор Лапласа $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ и форму объёма $\omega = dx \wedge dy$.

4. Покажите, что если функции f, g голоморфны в области D и не имеют в ней общих нулей, то в этой области

$$\Delta \ln \left(|f|^2 + |g|^2\right) \geqslant 0.$$

5. Найдите условие на дифференцируемую по вещественным аргументами функцию $f(z, \overline{z})$ необходимое и достаточное для коммутирования векторных полей $\mathrm{Re}\big(f(z,\overline{z})\partial_z\big)$ и $\mathrm{Im}\big(f(z,\overline{z})\partial_z\big)$.

6. Пусть f голоморфная в области D функция с простыми нулями. Опишите поведение модуля и аргумента f на фазовых кривых уравнения

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{f(z)}{f'(z)}$$

Какой тип имеет фазовый портрет данного поля в окрестности нуля $f(z)$?

7. Покажите, что если функция $f(z)$ голоморфна на $\mathbb{C}$ и $\mathrm{Re}\, f \leqslant \mathrm{Re}\, z$, то функция $f(z)$ линейна.

8. Докажите, что фазовый портрет голоморфного в области векторного поля не может иметь предельных циклов (изолированных замкнутых орбит)*

9. Пусть $P(z)$ многочлен. Докажите, что

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=R} P(z) d\overline{z} = -R^2 P'(a)$$

10. Пусть f непрерывная вещественнозначная в в круге $|z| \leqslant 1$ функция и выполняется $|f| \leqslant 1$. Докажите что

$$\left| \oint_{|z|=1} f(z) dz \right| \leqslant 4$$

---

*__Указание:__ Можно пользоваться теоремой существования и единственности и теоремой аналитической зависимости от начальных условий для комплексных дифференциальных уравнений.