

Образцы контрольных заданий по курсу Тэта-функции и модулярные функции

Пусть $\theta_{(a,b)}(\tau, z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e(\frac{\tau}{2}(k+b)^2 + (k+b)(z+a))$, $\psi(\tau, z)$ – функция Вейерштрасса.

Вариант контрольной работы

1. Доказать, что произведение $F = \psi \theta_{(0,5,0,5)}^2$ является тэта-функцией относительно коцикла, который нужно указать явно.
2. Сколько нулей функции F лежит в параллелограмме периодов?
3. Доказать, что удвоение аргументов тэта-функции веса k приводит к тэта-функции веса $2k$. Какой процент классических тэта веса $2k$ получается такой конструкцией?

Вариант экзамена

1. Доказать, что алгебра классических четных тэта четного веса изоморфна алгебре полиномов. Явно указать образующие.
2. Доказать, что при замене переменных $\tau \rightarrow 1/\tau, z \rightarrow z/\tau$ тэта переходит в новую тэта-функцию. Для какой решетки и с каким коциклом?
3. Доказать, что $\theta_{(0,0)} = 1 + O(e(\tau/2))$, $\theta_{(0,5,0)} = 1 + O(e(\tau/2))$ при $\tau \rightarrow i\infty$.