Задачи к 28.02.

Остались не разобранными две очень важная задачи:

- задача 3 из прошлого задания (про существование на кубике точки перегиба);
- задача 5 из позапрошлого задания (независимость определения оператора D_a от выбора проективных координат);

Задача 1 из прошлого задания была сформулирована с ошибкой, правильная формулировка ниже — задача 3.

(1) Докажите, что операторы D_a и D_b перестановочны, т.е. $D_a D_b = D_b D_a$. (Напоминание: $D_a = \sum_{k=0}^{k=n} a_k \frac{\partial}{\partial x_k}$.)

(2) Докажите, что если гиперповерхность X задана однородным уравнением степени d, и $a \in X$ неособая точка, то $P_{a^{d-1}}X$ совпадает с проективным касательным пространством $\mathbb{T}_a X$.

(3) (Это исправление неправильно сформулированной задачи 1 прошлого задания.) Доказать, что если $a \in P_{b^k}X$, то и $b \in P_{a^{d-k}}X$. (Здесь X — это гиперповерхность степени d в $\mathbb{P}^n$, заданная однородным уравнением $F(x_0, \dots, x_n) = 0$, а $P_a X$ — k-я поляра относительно точки $a \in \mathbb{P}^n$, т.е. гиперповерхность, заданная однородным уравнением $D_a^k F(x) = 0$.)

(4) Докажите, что если гиперповерхность X задана однородным уравнением степени d, и $a \in X$ неособая точка, то поляра $P_{a^{d-1}}X$ совпадает с проективным касательным пространством $\mathbb{T}_a X$.

(5) Докажите, что если $a \in X$ неособая точка гиперповерхности X, то точка a лежит на всех полярах $P_{a^k}X$ и является на них также неособой точкой.

(6) Докажите, что если $a \in X$ особая точка гиперповерхности X, то все поляры $P_{b^k}X$ проходят через точку a.

(7) Докажите, что если $a \in X$ особая точка гиперповерхности X, то точка a также является особой точкой всех поляр $P_{a^k}X$.

(8) Пусть на кривой X лежит простейшая особая точка a с разделенными касательными. (Напомним, что это значит, что если локально в аффинной карте с координатами (x, y) точка a имеет координаты $(0, 0)$, то уравнение кривой имеет вид $L_1(x, y)L_2(x, y) +$ слагаемые степени 3 и более $= 0$ где $L_1(x, y)$ и $L_2(x, y)$ — линейные формы.) Докажите, что если b другая точка плоскости (т.е. $b \neq a$), то поляра $P_b X$ неособа в точке a, и в пучке прямых, проходящих через точку a, пара прямых $L_1(x, y) = 0$ и $L_2(x, y) = 0$ гармонически делит пару прямых ab и $\mathbb{T}_a P_b X$. (Утешительный вариант этой задачи — проверить это для декартова листа.)

(9) Доказать, что определенная на прошлом занятии операция сложения на кубической кривой ассоциативна и каждая точка обладает противоположной.