ПЯТАЯ ВЫСОТА, ВШЭ, ТЛ "ДваждыДва" 16 февраля 2020

Сдедующее занятие 24-ого февраля!!!

Листок 14 Бета **Подсчет двумя способами. Часть 1.**

Упражнение 1: : Можно ли в прямоугольной таблице 5 х 10 (5 строк, 10 столбцов) так расставить числа, чтобы сумма чисел каждой строки равнялась бы 30, а сумма чисел каждого столбца равнялась бы 10?

Упражнение 2: На танцплощадке 10 девчонок и 9 ребят. Каждый раз танцевали пары из девушки с парнем. Каждый парень потанцевал с 5 девушками. 8 девушек потанцевали с четырьмя парнями каждая, ещё одна – с 8 парнями. Со сколькими парнями танцевала 10-я девушка?

1. В прямоугольной таблице 8 столбцов и 7 строк, сумма в каждом столбце — по 14. Чему равна сумма чисел в каждой строке, если она во всех строках одинаковая?
2. В строку записаны 10 чисел, причём сумма любых трёх подряд идущих чисел равна 7, а сумма всех чисел равна 30. Найдите, чему равно седьмое слева число.
3. В конференции принимало участие 19 ученых. После конференции каждый из них отправил 2 или 4 письма другим ученым, бывшим на конференции. Может ли получиться так, что каждый из них получит ровно по три письма?
4. В каждой клетке прямоугольной таблицы размером M x K написано число. Сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце равна 1. Докажите, что M = K.
5. На кошачьей выставке каждый посетитель погладил ровно трех кошек. При этом оказалось, что каждую кошку погладили ровно три посетителя. Докажите, что посетителей было ровно столько же, сколько кошек.
6. В однокруговом турнире участвовали 15 шахматистов. Могло ли оказаться, что каждый из них ровно 5 раз сыграл вничью? (За ничью каждому дают по баллу).

Подсчет двумя способами. Часть 2.

7. Две команды разыграли первенство по десятиборью. За победу в каждом из видов команда получала 4 очка, за ничью — 2 очка, за проигрыш — 1 очко. Суммарно обе команды набрали 46 очков. Сколько было ничьих?
8. В классе 27 человек. Каждый мальчик дружит с четырьмя девочками, а каждая девочка — с пятью мальчиками. Сколько в классе мальчиков и сколько девочек?
9. Четыре девочки – Катя, Лена, Маша и Нина – участвовали в концерте. Они пели песни. Каждую песню исполняли три девочки. Катя спела 8 песен – больше, чем каждая из остальных, а Лена – 5 песен – меньше, чем каждая из остальных девочек. Сколько песен было спето? За каждую песню каждая девочка получит грамоту.
10. Несколько шестиклассников и семиклассников обменялись рукопожатиями. При этом оказалось, что каждый шестиклассник пожал руку семи семиклассникам, а каждый семиклассник пожал руку шести шестиклассникам. Кого было больше - шестиклассников или семиклассников?
11. На сторонах шестиугольника было записано шесть чисел, а в каждой вершине — число, равное сумме двух чисел на смежных с ней сторонах. Затем все числа на сторонах и одно число в вершине стерли. Можно ли восстановить число, стоявшее в вершине?.

12. В танцевальном конкурсе принимали участие три пары. Каждый член жюри проголосовал за одну из пар, результаты голосования вносили в компьютер. В конце конкурса система выдала результаты: всего было 59 членов жюри, за первую и вторую пары в сумме отдано 15 голосов, за вторую и третью – 18, за третью и первую – 20. Оказалось, что система дала сбой и отразила неверные результаты. Известно, что каждое названное число отличается от истинного не более чем на 13. Сколько судей проголосовали за вторую пару?

13. Про группу из пяти человек известно, что:

    Алёша на 1 год младше Алексеева;

    Боря на 2 года старше Борисова;

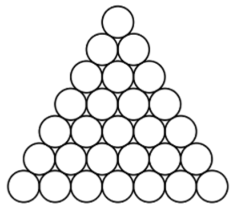
    Вася на 3 года младше Васильева;

    Гриша на 4 года старше Григорьева;

    в этой группе есть Дима и Дмитриев.

    Кто старше Дима или Дмитриев?

14. На столе в виде треугольника выложены 28 монет одинакового размера (см. рис.). Известно, что суммарная масса любой тройки монет, которые попарно касаются друг друга, равна 10 г. Найдите суммарную массу 18 монет, находящихся на границе треугольника.



15. Рита, Люба и Варя решали задачи. Чтобы дело шло быстрее, они купили конфет и условились, что за каждую решённую задачу девочка, решившая её первой, получает четыре конфеты, решившая второй — две, а решившая последней — одну. Девочки говорят, что каждая из них решила все задачи и получила 20 конфет, причём одновременных решений не было. Докажите, что они ошибаются.

16. Андрей, Максим и Влад играли в настольный теннис «навылет» (проигравший игрок, уступает место не игравшему игроку). Получилось, что Андрей сыграл всего 10 партий, Максим провел 16 партий, а Влад 17. Кто из мальчиков проиграл во второй партии?

Подсчет двумя способами. Решение

Упр. 1: Рассмотрим сумму всех чисел в таблице. Обозначим ее через S. С одной стороны, её можно посчитать по строкам, с другой — по столбцам. Значения должны совпадать. Пусть нам удалось расставить числа. Тогда по строкам: S=5*30=150. По столбцам: S=10*10=100. Видим, что при такой расстановке чисел получаем противоречие. Ответ: нельзя.

Упр. 2: Сложим количество танцев девочек, сложим количество танцев мальчиков. Полученные значения должны совпадать. Поскольку каждый танец танцевала пара — девушка и парень. Пусть 10—я девушка станцевала x танцев. Тогда, количество танцев с одной стороны равно 5*9=45 (каждый парень танцевал с пятью девушками), с другой стороны — 8*4 + 1*8 + 1*x =40+x. Мы уже сказали, что эти величины равны, а значит: 45=40+x. Нетрудно догадаться, что x=5. Ответ: с пятью парнями.

1. Пусть сумма чисел в каждой строке равна x. Выбираем величину, как и в первом упражнении это сумма всех чисел в таблице. По столбцам: 8*14=112. По строкам: 7x. Тогда 112=7x, откуда находим: x=16. Ответ: 16.

2. Обозначим искомое число через x. Заметим, что искомое число седьмое слева, а с другой стороны — оно четвёртое справа. Слева от x имеем 6 чисел, справа от x стоит 3 числа. Первое+второе+третье=7; четвёртое+пятое+шестое = 7; восьмое+девятое+десятое=7. Тогда сумма всех десяти чисел: первое+...+шестое+x+восьмое+...+десятое= 7+7+x+7=30. Отсюда получаем, что x=9. Ответ: 9.

3. предположим, это возможно. Заметим, что количество отправленных и количество полученных писем это одна и та же величина. Посчитаем ее с двух сторон. Пусть x ученых отправили по 2 письма, тогда (19-x) ученых отправили по 4 письма. Итого, всего отправлено: 2x+4*19-4x=76-2x. Заметим, что отправлено четное количество писем. А получено: 19*3=57 —нечетное число. Таким образом, мы пришли к противоречию. Значит, получиться так не могло. Ответ: нет.

4. Снова считаем сумму всех чисел таблицы двумя способами. Поскольку таблица содержит M строк и сумма чисел каждой строки равна 1, то вся сумма равна M. Аналогично, считая эту же сумму по столбцам, получим в результате K.

5. Давайте будем фиксировать каждый случай, когда кошка была поглажена. Причём, каждый случай будет приписан двоим: кошке, которую погладили и посетителю, который гладил эту кошку. Получим две колонки. В первой колонке каждая кошка учтена три раза (каждую гладили три посетителя). Во второй колонке каждый посетитель учтён три раза (каждый погладил троих). Эти колонки имеют одинаковую длину, поскольку в каждую мы делали запись одновременно. Суммируем первую колонку, суммируем вторую — получаем одну и ту же величину! Поделим эту величину на три и получим в точности количество кошек, оно же количество посетителей.

6. Пусть такое может быть. Каждая ничья суммарно приносит два очка (оба игрока получают по одному баллу). Посчитаем суммарное количество баллов по количеству сыгранных ничьих. Умножаем количество ничьих на два — получаем четное количество очков. Теперь посчитаем баллы по количеству игроков. Игроков 15, каждый сыграл 5 ничьих, таким образом, суммарно набрано 15*5 = 75 очков — нечетное число! Получили противоречие. Ответ: не могло.

7. посмотрим на каждую игру с двух сторон. Выигрыш первой Команды приносит ей 4 очка, с другой стороны, эта же игра приносит команде проигравших 1 очко. Таким образом, суммарно каждая игра приносит либо 5 очков (4+1), либо — 4 очка (2+2). Если предположить, что все игры были сыграны вничью, то суммарно получилось бы 4*10=40 очков. Но известно, что очков 46. Каждая результативная игра добавляет к этой сумме по одному очку. А значит, результативных игр было 46-40=6. Значит ничьих было 4. Ответ: 4 ничьих.

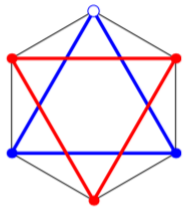
8. предположим, что в классе учится m мальчиков, значит девочек — (27-m). Какую величину можно посчитать двумя способами ? Количество «дружб». Считаем эту величину сначала по количеству мальчиков : m*4. С другой стороны, по количеству девочек: (27-m)*5. Эти значения

должны быть равны. 4m=135-5m, вспомним весы! Добавим на левую чашу весов и на правую чашу 5m. Тогда получим 9m=135, отсюда получаем : m=15, значит девочек : 27-15=12. Ответ: 15 мальчиков, 12 девочек.

9. Будем считать суммарное количество грамот полученных девочками. Суммируя общее число грамот по песням видим, что это число делится на 3 (каждая песня исполнялась 3 раза). Посчитаем это число другим способом. Катя получила 8 грамот, Лена получила 5 грамот. Катя и Маша получили меньше восьми грамот, каждая, но больше пяти! Таким образом, Катя с Машей могли получить либо 7 и 7; либо 6 и 7; либо 6 и 6 грамот каждая. Проверим все три варианта. 8+5+7+7=27; 8+5+6+7=26; 8+5+6+6=25. Среди трёх чисел только одно делится на 3, это 27. То есть 27 грамот получено. Следовательно, песен спето 27:3=9. Ответ: 9 песен.

10. Величина, которую мы будем считать двумя способами это количество рукопожатий. В каждом рукопожатии принимали участие двое: один семиклассник и один шестиклассник. Пусть семиклассников было s, а шестиклассников было n. Тогда количество состоявшихся рукопожатий с одной стороны равно n*7, а с другой стороны — s*6. Эти значения равны, следовательно 7n =6s. Поскольку 6s < 7s, значит 7n<7s, следовательно n<s. Ответ: семиклассников было больше.

11. Если сложить числа в вершинах через одну (всего три числа), то получится сумма всех чисел, которые были написаны на сторонах. Выбрать три вершины через одну можно двумя способами: — таким образом, сумма чисел в вершинах синего треугольника равна сумме чисел в вершинах красного. Пусть стёрто число в «синей» вершине. Тогда восстановить его можно следующим образом: из суммы «красных» чисел (они все известны) вычесть оставшиеся два «синих» числа.



12. Число голосов, поданных за первую и вторую пары, не может быть больше 15 + 13 = 28. Аналогично за вторую и третью в сумме не может быть подано больше 18 + 13 = 31 голоса, а за третью и первую – не больше 20 + 13 = 33 голосов. Сложив эти три результата, мы оценим сверху удвоенное число всех голосов. Таким образом, число членов жюри не больше (28 + 31 + 33) : 2 = 46. С другой стороны, оно не может быть меньше 59 – 13 = 46. Тем самым, членов жюри ровно 46, а все неравенства на самом деле обращаются в равенства. Число проголосовавших за вторую пару можно найти как разность общего числа членов жюри и суммы проголосовавших за третью и первую пары: 46 – 33 = 13 голосов. Ответ: 13 судей.

13. группа состоит из пяти человек, имеем пять имён и пять фамилий. Посчитаем сумму всех возрастов двумя способами. Сначала по именам, затем по фамилиям. Обозначим: возраст Алёши : А лет, Бори —Б, Васи — В, Гриши —Г, Димы — Д. Тогда сумма всех возрастов с одной стороны равна : А+Б+В+Г+Д. С другой стороны : (А+1)+(Б-2)+(В+3)+(Г-4) + x= А+Б+В+Г-2 +x. Где x это возраст Дмитриева. Приравняем А+Б+В+Г+Д =А+Б+В+Г-2 +x, вспомним весы. Слева и справа убираем одинаковые буквы, остаётся равенство Д=x-2, откуда x=2+Д. Ответ: Дмитриев на 2 года старше Димы.

14. Все монеты без центральной можно разбить на 9 троек, а все внутренние монеты без центральной — на 3 тройки. Значит, монеты на границе весят 9-3=6 троек, т.е. 60 г.

15. С одной стороны, общее количество конфет равно $20 \cdot 3 = 60$. С другой стороны, за каждую задачу выдавалось (в сумме) по $4 + 2 + 1 = 7$ конфет (здесь важно, что каждая девочка в итоге пришла к решению, таким образом, приз и за первое, и за второе, и за третье решение действительно был выдан) — значит, общее количество конфет должно делиться на 7. Однако 60 на 7 не делится. Значит, где-то ошибка.

16. Общее количество сыгранных партий было (10 + 15 + 17)/ 2 = 21. Если трое играют «навылет», то любой игрок пропускает не больше одной партии подряд. Значит, если Андрей играл в первой партии, то из остальных 20 партий он играл хотя бы в 10 и всего получается не менее 11 партий. Противоречие. Значит, Андрей впервые вышел играть во второй партии. Если бы он эту партию выиграл, то играл бы и в 3, а также не менее, чем в 9 из 18 оставшихся партий. Но тогда бы он сыграл более 10 раз. Противоречие. Следовательно, во втором матче Андрей проиграл. Ответ: Андрей