

R-матрицы и инварианты

§ 1 Представления Бурау (Werner Baur)

Какие представления группы  $KOS$ , помимо тривиального одномерного  $g_i \mapsto \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}^\times$ , мы знаем?

Представление  $B_n$  (точнее,  $S_n$ ) перестановками набора  $n$  элементов:

Элементами набора у нас будут базисные векторы  $n$ -мерного пространства  $V$ :  $\sigma_i, i=1, 2, \dots, n$ .

Действие перестановки  $\pi \in S_n$ :

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix} \quad \sigma_i \xrightarrow{\pi} \sigma_{\pi(i)}$$

Матрицы элементарных перестановок  $\sigma_j$  в базисе  $\{\sigma_i\}$  имеют вид

$$\sigma_j = (\sigma_j, \sigma_{j+1}) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & \\ & & & 1 & 0 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

j j+1 - е столбца

j j+1 - е строки

Это представление приводимо.

Одномерное тривиальное <sup>погр</sup> представление (отвечает диаграмме  $\underbrace{\boxed{\dots}}_{n \text{ клеток}}$ ) действует на векторе

$$\omega = \sum_{i=1}^n \sigma_i \quad ; \quad \sigma_j \omega = \omega.$$

(n-1)-мерное неприводимое погр-представление, отвечающее диаграмме  $\boxed{\dots} \uparrow$ , действует на подпространстве с базисом  $\tilde{\sigma}_i = \sigma_i - \sigma_n, i=1,2,\dots,n-1.$

Вернер Бурау (1936) ввел дополнительный параметр в это представление  $B_n$  (уже не  $S_n$ ):

$$v_i \mapsto \begin{pmatrix} I_{i-1} & & 0 \\ & \begin{matrix} 1-t, t \\ 1, 0 \end{matrix} & \\ 0 & & I_{n-i} \end{pmatrix} \begin{matrix} i \\ i+1 \end{matrix} \quad (1a)$$

Здесь  $I_k$  - единичная матрица размера  $k \times k$ .  
У матриц, представляющих  $v_i$ , 2 различных собственных значения: 1 и -t, поэтому измением масштаба можно ввести представление Бурау к представлению алгебры Ивахори-Текке  $th(q)$ :

$$v_{i,n} \mapsto \begin{pmatrix} q \cdot I_{i-1} & & 0 \\ & \begin{matrix} \lambda & \alpha \\ \alpha^{-1} & 0 \end{matrix} & \\ 0 & & q \cdot I_{n-i-1} \end{pmatrix}, \quad \lambda = q - \frac{1}{q}, \quad (1b)$$

$q, \alpha \in \mathbb{C}^*$

Здесь второй параметр  $\alpha$  устраняется преобразованием

подобия. Он вводится для удобства дальнейших построений.

(3)

Упражнение 1 а) Убедитесь, что (16) задает представление алгебры  $H_n(a)$  / Достаточно рассмотреть случай  $n=3$ /

б) Определите неприводимые компоненты представления Бурау. Убедитесь:

$$\text{Вира}_n = \underbrace{\boxed{\dots \boxed{\phantom{x}}}}_{n \text{ клеток}} \oplus \boxed{\dots \boxed{\phantom{x}}}$$

§ 2

R-матричные представления  $V_n$

Пока мы построили представления  $V_n$  в пространствах малых размерностей ( $\dim V = n$ ), поэтому и запас неприводимых компонент в них беден. Чтобы поймать больше различных представлений надо увеличить размерность пространств представлений. Давайте переставлять не отдельные элементы множеств, а линейные пространства. Рассмотрим

$$W = V^{\otimes n} = \underbrace{V \otimes V \otimes \dots \otimes V}_{n \text{ раз}} = V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n$$

введем нумерацию пространств в тензорном произведении.  
 $V_i \cong V \quad \forall i$

В этих пространствах действуют операторы перестановки:

$$P \in \text{Aut}(V \otimes V): P(u \otimes v) = v \otimes u \quad \forall u, v \in V$$

По этому оператору строим его "копии"  $P_i$ , действующие в компонентах  $V_i \otimes V_{i+1}$  пространства  $W$ :

$$P_i \in \text{Aut}(W): P_i := \text{Id}_{V^{\otimes(i-1)}} \otimes P \otimes \text{Id}_{V^{\otimes(n-i-1)}}$$

↑  
действует в  $V_i \otimes V_{i+1}$

Иногда  $P_i$  обозначают  $P_{i+1}$ , это же явно указать, векторы каких пространств переставляются

Отображение

$$\sigma_i \mapsto P_i$$

является представлением симметрической группы

$$S_n \rightarrow \text{Aut}(W)$$

Упражнение 2. Проверьте, что это действительно так

Пример: Рассмотрим 2-мерное пространство  $V$  с базисом  $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ . В  $V \otimes V$  индуцируется базис:

$$\{\sigma_1 \otimes \sigma_1, \sigma_1 \otimes \sigma_2, \sigma_2 \otimes \sigma_1, \sigma_2 \otimes \sigma_2\}$$

элементы которого мы будем обозначать мульти-индексами:  $\{\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{22}\}$

В этом базисе  $P$  имеет матрицу:

$$P = P_1 (= P_{12}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 11 & 12 & 21 & 22 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 11 \\ 12 \\ 21 \\ 22 \end{matrix} & \left[ \begin{array}{c|c|c|c} \hline 1 & & & \\ \hline & & 1 & \\ \hline & 1 & & \\ \hline & & & 1 \\ \hline \end{array} \right] \end{matrix}$$

□ ⊕ □

Она имеет блочный вид. Компоненты разложения ее на неприводимые представления  $\mathbb{F}_2$  указаны.

Попробуем ввести параметр в  $P$  по примеру Бурау: заменим  $2 \times 2$  блок в  $P$  на  $2 \times 2$  блок из (18) и изменим масштаб  $1 \times 1$  блоков стел, чтобы у получившейся матрицы было 2 разных собственных значения:  $q$  и  $-q^{-1}$ .

$$R = \begin{matrix} & \begin{matrix} 11 & 12 & 21 & 22 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 11 \\ 12 \\ 21 \\ 22 \end{matrix} & \left[ \begin{array}{c|c|c|c} \hline q & & & \\ \hline & q^{-1} & x & \\ \hline & x^{-1} & & \\ \hline & & & q \\ \hline \end{array} \right] \end{matrix} \quad (2)$$

Получившийся оператор  $R \in \text{Aut}(V \otimes V)$ ,  $\dim V = 2$  имеет спектр  $\text{Spec } R = \{q^{\#3}, -\frac{1}{q}\}$ . Он также удовлетворяет соотношению

$$R_1 R_2 R_1 = R_2 R_1 R_2, \text{ где}$$

$$R_1, R_2 \in \text{Aut}(V^{\otimes 3}), R_1 = R \otimes \text{Id}_V$$

$$R_2 = \text{Id}_V \otimes R$$
(3)

Упражнение 3 Убедитесь в справедливости соотношений (3) для оператора (2) (6)

Поэтому с использованием  $R$  (2) можно построить серию представлений

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_n &\xrightarrow{\rho_R} \text{Aut}(V^{\otimes n}) \\ \mathcal{B}_i &\xrightarrow{\rho_R} R_i := \text{Id}_{V^{\otimes(i-1)}} \otimes R \otimes \text{Id}_{V^{\otimes(n-i-1)}} \end{aligned} \quad (4)$$

Def: Матрица  $R \in \text{Aut}(V^{\otimes 2})$ , удовлетворяющая соотношению (3), называется  $R$ -матрицей.

Соотношения (3) при этом принято называть уравнением Янга-Бакстера, или соотношением кос. По любой  $R$ -матрице можно построить представление группы кос  $\mathcal{B}_n$  (4) называемое  $R$ -матричным.

Если дополнительно  $R$ -матрица имеет минимальный многочлен вида

$$\left[ (R - q \text{Id}_{V^{\otimes 2}})(R + q^{-1} \text{Id}_{V^{\otimes 2}}) = 0 \right], \quad (5)$$

то  $R$ -матрица называется реккевской, а порожденное ей  $R$ -матричное представление, является представлением алгебры Гекке  $th(q)$ .

$R$ -матрица (2) является реккевской.

Реш: Отличительные особенности  $R$ -матричных (7)  
представлений  $V_n$ :

а) локальность:  $\varphi_R(v_i)$  действует не тривиально  
лишь в компонентах  $V_i \otimes V_{i+1}$  пространства  $V^{\otimes n}$

б) однородность: все  $\varphi_R(v_i)$  строятся с помощью  
одной и той же  $R$ .

Существуют обобщения  $R$ -матричных представлений,  
где эти условия ~~удовлетворяются~~ ослабляются. Они строятся  
с помощью "динамических"  $R$ -матриц.

Реш: В определении  $R$ -матрицы подчеркивается,  
что  $R$  — это матрица, а не оператор. Дело в том,  
что преобразование подобия  $R \mapsto URU^{-1}$ , вводящее  
говоря, не совместимо с уравнением Янга-Бакстера (3).  
Поэтому свойство  $R \in \text{Aut}(V^{\otimes 2})$  быть  $R$ -матрицей  
зависит от выбора базиса в  $V^{\otimes 2}$ . Уравнение Янга-  
Бакстера сохраняется при ограниченной классе  
преобразований подобия:

$$R_{12} \mapsto X_1 X_2 R_{12} (X_1 X_2)^{-1} \quad (6)$$

называемых калибровочными преобразованиями.

Здесь  $X \in \text{Aut}(V)$  — смена базиса в  $V$ ,

$X_1 := X \otimes \text{Id}_V$ ,  $X_2 := \text{Id}_V \otimes X$ , так что  $X_1 X_2 = X \otimes X$  —

одновременная замена базиса в обеих компонентах  
 $V$  пространства  $V \otimes V$ .

В заключение параграфа предведем обобщение (8)  $R$ -матрицы (2) на случай пространства  $V$  большей размерности:

$$R = \sum_{i=1}^N q e_{ii} \otimes e_{ii} + \sum_{i \neq j=1}^N x_{ij} e_{ij} \otimes e_{ji} + \lambda \sum_{1 \leq i < j \leq N} e_{ii} \otimes e_{jj} \quad (7)$$

где  $\lambda := q - \frac{1}{q}$ ,  $x_{ij} x_{ji} = 1 \quad \forall i, j$ .

Такие  $R$ -матрицы называют (какомическими)  $R$ -матрицами Дринфельда-Джимбо (Drinfeld-Jimbo)  $GL_q(N)$ . Они связаны с квантовыми группами серии  $GL_q(N)$ .

Здесь  $e_{ij} \in \text{End}(V)$  — уже упоминавшиеся матричные единицы — матрица размера  $N \times N$  ( $\dim V = N$ ), у которой на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца стоит единица, а все остальные — нули.

При этом  $e_{ij} \otimes e_{kl}$  — матрица размера  $N^2 \times N^2$ , у которой единичная единица стоит на пересечении строки с индексом  $ik$  и столбца с индексом  $jl$ .

Поскольку матрица  $R$  (7) состоит из  $1 \times 1$  блоков  $ii - q$  и  $2 \times 2$  блоков  $\begin{matrix} ij & ji \\ ji & ij \end{matrix} \begin{pmatrix} \lambda & x_{ij} \\ \frac{1}{x_{ij}} & 0 \end{pmatrix}$ ,  $i < j$ , то она, очевидно,  $\mathbb{Z}$ -целковая.

Для проверки соотношений Янга-Бакстера для нее заметим, что матрицы  $R_1$  и  $R_2$  в



в пространстве  $V^{\otimes 3}$  действуют инвариантно (9)  
 на подпространствах размерностей 1, 3 и 6.

У них  $1 \times 1$  блоки на пересечении строк и столбцов с индексом "iii";

$3 \times 3$  блоки на пересечении строк и столбцов с индексами  $\{iij, iji, jii\}$ , ~~и т.д.~~,  $i \neq j$ ;

$6 \times 6$  блоки на пересечении строк и столбцов с индексами  $\{ijk, jik, jki, kji, ikj, kij\}$   $i < j < k$ .

Поэтому уравнение Янга-Бакстера для  $R$ -матрицы (7) можно проверять отдельно в  $1 \times 1$ ,  $3 \times 3$  и  $6 \times 6$  блоках, причем в каждом из этих блоков оно выглядит универсально, вне зависимости от выбора индексов  $i, j, k$ .

Представим  $R_1$  и  $R_2$  в  $6 \times 6$  блоке для

$i=1, j=2, k=3$ :

$$R_1 = \begin{array}{c} 123 \\ 213 \\ 231 \\ 321 \\ 132 \\ 312 \end{array} \left[ \begin{array}{cc|cc|cc} \lambda & x_{12} & & & & \\ \frac{1}{x_{12}} & 0 & & & & \\ \hline & & \lambda & x_{23} & & \\ & & \frac{1}{x_{23}} & 0 & & \\ \hline & & & & \lambda & x_{13} \\ & & & & \frac{1}{x_{13}} & 0 \end{array} \right]$$

$$R_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 123 & 213 & 231 & 321 & 132 & 312 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 123 \\ 213 \\ 231 \\ 321 \\ 132 \\ 312 \end{matrix} & \left[ \begin{array}{cccccc} \lambda & & & & & x_{23} \\ & \lambda & & & & x_{13} \\ & & \frac{1}{x_{13}} & & & 0 \\ & & & 0 & & \frac{1}{x_{12}} \\ \frac{1}{x_{23}} & & & & 0 & \\ & & & & x_{12} & \lambda \end{array} \right] \end{matrix}$$

Упражнение 4: Проверьте, что выше приведенное матрица  $R_1$  и  $R_2$  удовлетворяют уравнению Янга-Бакстера. Проверьте то же самое для  $3 \times 3$  блоков  $\{iij, iji, jii\}$ .

Упражнение 5\* Убедитесь, что матрица

$$R = \sum_{i=1}^{N+M} \varepsilon_i q^{\varepsilon_i} e_{ii} \otimes e_{ii} + \sum_{i \neq j=1}^{N+M} (-1)^{(1-\varepsilon_i)(1-\varepsilon_j)} e_{ij} \otimes e_{ji} + \lambda \sum_{1 \leq i < j \leq N+M} e_{ii} \otimes e_{jj}$$

является геккевской  $R$ -матрицей.  $\left\{ \varepsilon_i = \begin{cases} +1, & i=1 \dots N \\ -1, & i=N+1 \dots N+M \end{cases} \right.$

Эти  $R$ -матрицы связаны с квантовыми супергруппами  $GL_q(N, M)$  (Кулиш Р.П., Скленик Е.К. 1980)

~~Реш~~ Реш: В отличие от представления Витана (16) в  $R$ -матричном представлении (7) не все параметры  $x_{ij}$  можно устранить каноническим преобразованием (6).

Реш: При фиксированном  $\dim V = N$  всякое  $R$ -матричное представление  $V_n \xrightarrow{R} \text{Aut}(V^{\otimes n})$  начиная с некоторого  $n$  имеет нетривиальное ядро, т.е. не является точным:  $n! > N^{2n}$  при  $n \rightarrow \infty$ .

§3 Косо обратимые R-матрицы.

Представим R-матрицу  $R \in \text{Aut}(V \otimes V)$  картинкой

$$R : \begin{array}{c} \hat{j}_1 \quad \hat{j}_2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \\ \diagup \quad \diagdown \\ \hat{i}_1 \quad \hat{i}_2 \end{array} = R_{\hat{i}_1 \hat{i}_2}^{\hat{j}_1 \hat{j}_2} \quad (8a)$$

Здесь  $\hat{i}_1 \hat{i}_2 / \hat{j}_1 \hat{j}_2$  - мульти-индекс столбца/строки R-матрицы;  $\hat{i}_1, \hat{j}_1$  - матричные индексы первого пространства  $V_1$ ,  $\hat{i}_2, \hat{j}_2$  - второго пространства  $V_2$  ( $V^{\otimes 2} = V_1 \otimes V_2$ )

$R^{-1}$  естественно рисовать так:

$$R^{-1} : \begin{array}{c} \hat{j}_1 \quad \hat{j}_2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \\ \diagup \quad \diagdown \\ \hat{i}_1 \quad \hat{i}_2 \end{array} = (R^{-1})_{\hat{i}_1 \hat{i}_2}^{\hat{j}_1 \hat{j}_2} \quad (8b)$$

Тогда формула

$$R \cdot R^{-1} = \text{Id}_{V \otimes V} : \sum_{k_1, k_2=1}^N R_{k_1, k_2}^{\hat{j}_1 \hat{j}_2} (R^{-1})_{\hat{i}_1 \hat{i}_2}^{k_1, k_2} = \delta_{\hat{i}_1}^{\hat{j}_1} \delta_{\hat{i}_2}^{\hat{j}_2}$$

представляется так:

$$R_{k_1, k_2}^{\hat{j}_1 \hat{j}_2} (R^{-1})_{\hat{i}_1 \hat{i}_2}^{k_1, k_2} = \begin{array}{c} \hat{j}_1 \quad \hat{j}_2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \\ \diagup \quad \diagdown \\ \hat{i}_1 \quad \hat{i}_2 \end{array}$$

что соответствует 2-му главному Рейдемейстера

при изотопических преобразованиях узлов/зацеплений. (12)

Третьему движению Рейдемейстера соответствует уравнение Янга-Бокстера (3):

Для того, чтобы обеспечить применение R-матриц в теории инвариантов узлов/зацеплений, надо еще найти аналог 1-го движения Рейдемейстера в виде формулы для R-матриц. С этой целью рассмотрим обращение R-матриц не в вертикальном, а в горизонтальном направлении, то есть не по паре индексов  $(j_1 j_2)$ , а по паре  $(i_2 i_3)$ .

Def: Назовем R-матрицу  $R_{12}$  косо-обратимой если существует матрица  $\Psi_{12}^R$ , такая что

$$\text{Tr}_{(2)} R_{12} \Psi_{23}^R = \text{Tr}_{(2)} \Psi_{12}^R R_{23} = P_{13} \quad (9)$$

Здесь символ  $\text{Tr}_{(2)}$  означает взятие следа ~~в~~ для ~~матрицы~~ матричных индексов пространства  $V_2$ :

$$\text{Tr}_{(2)} R_{12} \Psi_{23}^R = \sum_{i_2, j_2=1}^N R_{i_1 i_2}^{j_1 j_2} \Psi_{j_2 i_3}^{i_2 j_3} = \sum_{i_1, i_3} \delta_{i_1}^{j_3} \delta_{i_3}^{i_1} = P_{13}$$

$P_{13}$  - матрица оператора перестановки

$\Psi_{12}^R$  называется косо-обратной матрицей для матрицы  $R$ .

Зафиксируем еще обозначения

$$C_2^R := \text{Tr}_{(1)} \Psi_{12}^R, \quad D_1^R := \text{Tr}_{(2)} \Psi_{12}^R \quad (10)$$

или в индексах:

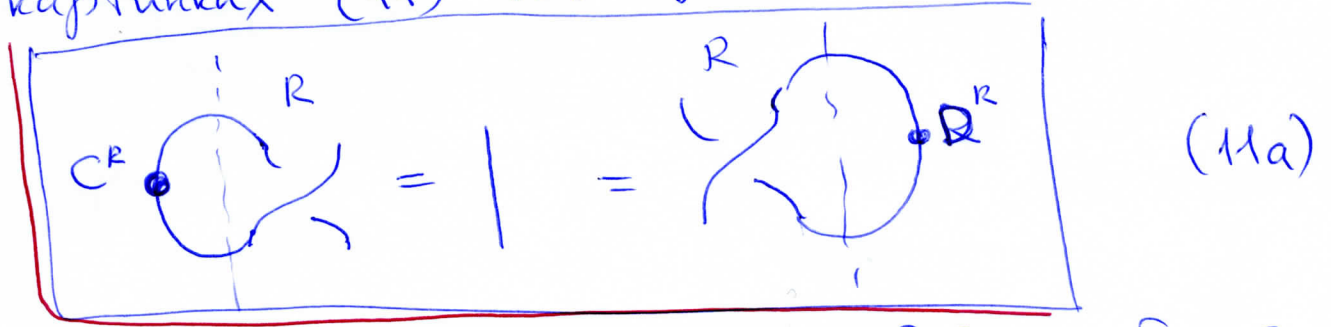
$$(C^R)_{i_2}^{j_2} = \sum_{i_1} (\Psi^R)_{i_1 i_2}^{i_1 j_2}, \quad (D^R)_{i_1}^{j_1} = \sum_{i_2} (\Psi^R)_{i_1 i_2}^{j_1 i_2}$$

Ключевое свойство матриц  $C^R, D^R \in \text{Aut}(V)$ :

$$\text{Tr}_{(1)} C_1^R R_{12} = I_2, \quad \text{Tr}_{(2)} D_2^R R_{12} = I_1 \quad (11)$$

Здесь  $I_{2/1}$  - единичный оператор в пространстве  $V_{2/1}$

В картинках (11) выглядит так:



что похоже на  $\Delta$ -е движение Рейдемейстера.

Доказательство (11): Возьмем  $\text{Tr}_{(1)}$  от правого соотношения в (9):

$$\text{Tr}_{(1)} (\text{Tr}_{(2)} \Psi_{12}^R R_{123}) = \text{Tr}_{(2)} C_2^R R_{123}$$

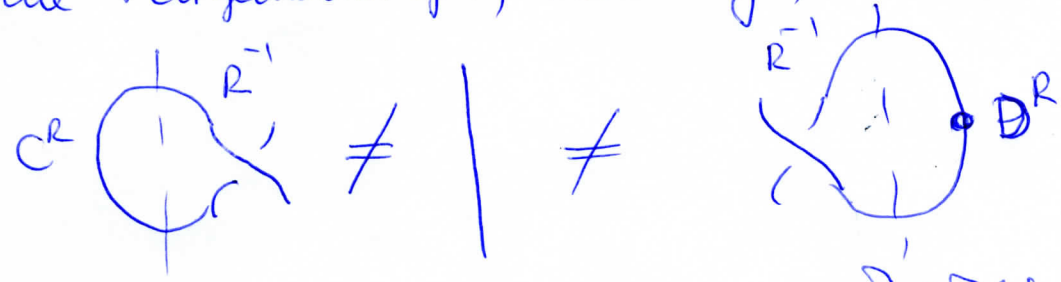
С другой стороны:

$$\text{Tr}_{(1)} P_{13} = I_3$$

→ (11)



Реш: (11a) - это еще не вполне 1-е движение -  
ние Рейдемейстера, поскольку, вообще говоря



С этим нам еще предстоит разобраться.

Упражнение 6. Докажите, что если R - координатная матрица, то свойства (11) удовлетворяют матрицы C^R и D^R.

Следующее утверждение даёт связь между  $\Psi^R$  и  $R^{-1}$ :

Утверждение 1 Если R - координатная R-матрица, то выполняются соотношения:

$$\begin{aligned} C_1^R \Psi_{12}^R &= R_{21}^{-1} C_2^R, & \Psi_{12}^R C_1^R &= C_2^R R_{21}^{-1} \\ D_2^R \Psi_{12}^R &= R_{21}^{-1} D_1^R, & \Psi_{12}^R D_2^R &= D_1^R R_{21}^{-1} \end{aligned} \quad (12)$$

Доказательство: Используем соотношение Фробениуса в виде

$$R_{12}^\varepsilon R_{23} R_{12}^{-\varepsilon} = R_{23}^{-\varepsilon} R_{12} R_{23}^\varepsilon, \quad \varepsilon = \pm 1$$

~~Видно~~ Докажем слева на  $\Psi_{01}^R \Psi_{34}^R$  и возьмем  $\text{Tr}(1,3)$ :

$$\text{Tr}_{(1)} \Psi_{01}^R R_{12}^\varepsilon (\text{Tr}_{(3)} \Psi_{34}^R R_{23}) R_{12}^{-\varepsilon} = \text{Tr}_{(3)} \Psi_{34}^R R_{23}^{-\varepsilon} (\text{Tr}_{(1)} \Psi_{01}^R R_{12}) R_{23}^\varepsilon$$

$$\text{Tr}_{(1)} \Psi_{01}^R R_{12}^\varepsilon P_{24} R_{12}^{-\varepsilon} = \text{Tr}_{(3)} R_{23}^{-\varepsilon} P_{02} R_{23}^\varepsilon \Psi_{34}^R$$

переставили  $\Psi_{34}^R$  по циклу под знаком  $\text{Tr}_{(3)}$

Возвращаемся от полученной формулы следов  $\text{Tr}_{(1)}$  или  $\text{Tr}_{(4)}$ :

$\text{Tr}_{(1)}$ :  $\text{Tr}_{(1)} C_1^R R_{12}^\varepsilon P_{24} R_{12}^{-\varepsilon} = C_4^R I_2$  (\*)

$\text{Tr}_{(4)}$ :  $\text{Tr}_{(3)} R_{23}^{-\varepsilon} P_{02} R_{23}^\varepsilon D_3^R = D_0^R I_2$

При возвращении мы опять воспользовались формулой следов от оператора перестановки

$$\text{Tr}_{(1)} P_{12} = I_2 = \text{Tr}_{(3)} P_{23}$$

и учли определения  $C^R$  и  $D^R$ .

Добавим первое из соотношений (\*) на  $P_{24}$  справа и учтём свойство оператора перестановки:

$$M_1 P_{12} = P_{12} M_2, \quad M_2 P_{12} = P_{12} M_1,$$

где  $M$  — любой оператор  $\in \text{End}(V)$ .

Получим:

$$\text{Tr}_{(1)} C_1^R R_{12}^\varepsilon R_{12}^{-\varepsilon} = C_4^R P_{24} \quad (**)$$

В случае  $\varepsilon = +1$  домножим последнее равенство на  $\Psi_{23}^R$  справа и вычислим  $\text{Tr}_{(2)}$ :

$$\text{Tr}_{(1)} C_1^R (\text{Tr}_{(2)} R_{12} \Psi_{23}^R) R_{14}^{-1} = C_4^R (\text{Tr}_{(2)} \Psi_{43}^R P_{24})$$

$$\text{Tr}_{(1)} C_1^R P_{13} R_{14}^{-1} = C_4^R \Psi_{43}^R$$

В левой части переставляем  $R_{14}^{-1}$  под знаком  $\text{Tr}_{(1)}$  по указу налево, а затем, переставляем  $R_{14}^{-1} C_1^R$  направо через  $P_{13}$ . Получаем

$$\text{Tr}_{(1)} P_{13} R_{34}^{-1} C_3^R = C_4^R \Psi_{43}^R$$

$$R_{34}^{-1} C_3^R = C_4^R \Psi_{43}^R, \text{ — левое соотношение}$$

из первой строки в (12). Правое соотношение из этой строки получается, если, взяв  $\varepsilon = -1$ , домножить (\*\*\*) на  $\Psi_{43}^R$  и вычислить  $\text{Tr}_{(3)}$ .

Соотношение из второй строки в (12) получается, если скалярными образом преобразовать второе соотношение в (\*\*)

Следствие 2: В условиях Утв. 1:

$$C_1^R D^R = D^R C_1^R$$

Док-во: Применим  $\text{Tr}_{(2)}$  к первому из двух верхних соотношений в (12). 

Следствие 3: В условиях Утв. 1:

$$[R_{12}, C_1^R C_2^R] = [R_{12}, D_1^R D_2^R] = 0 \quad (13)$$



Доказательство:  $R_{12}^{-1} C_1^R C_2^R = C_2^R \Psi_{21}^R C_2^R = C_2^R C_1^R R_{12}^{-1} = \textcircled{17}$   
 $= C_1^R C_2^R R_{12}^{-1}$ . — мы используем соотношения 1-й строки (12). Вторая строка (12) даёт коммутативность  $R_{12}^{-1}$ , а следовательно и  $R_{12}$ , с  $D_1^R D_2^R$   $\square$

Def: ~~Ранж~~ Косо-обратимая  $R$ -матрица  $R$  называется строго косо-обратимой, если хотя бы одна из матриц  $C^R, D^R$  обратима.

Корректность этого определения подтверждается

Утверждением 4: Следующие утверждения равносильны:

- а)  $R$  — строго <sup>косо</sup> обратимая  $R$ -матрица  
 б)  $R$  и  $R^{-1}$  — косо-обратимы.  
 Если а) или б) выполняются, то  $C^R$  и  $D^R$  обе обратимы, причём

$$C^{R^{-1}} = (D^R)^{-1}, \quad (D^{R^{-1}}) = (C^R)^{-1} \quad (14)$$

Доказательство: Докажем а)  $\Rightarrow$  б)

$$\text{Tr}_{(2)} R_{12} \Psi_{23}^R = P_{13}$$

Докажем на  $D_3^R$  справа, применим в левой части (12)

$$\text{Tr}_{(2)} \underbrace{R_{12} D_2^R R_{32}^{-1}}_{\text{цикл}} = D_1 P_{13}$$

Докажем обе части на  $(D_1^R)^{-1}$  — тут используем 18  
~~все~~ предположение строгой косо-обратимости  $R$  с  
 обратимой  $D_2^R$ ; в левой части под знаком  $\text{Tr}_{(2)}$  проко-  
 сии по циклу  $(D_1^R)^{-1} R_{12} D_2^R$ :

$$\text{Tr}_{(2)} R_{32}^{-1} (D_1^R)^{-1} R_{12} D_2^R = P_{13}$$

Это соотношение свидетельствует о косо-обратимости  
 $R^{-1}$  и даёт формулу

$$\Psi_{12}^{R^{-1}} = (D_2^R)^{-1} R_{21} D_1^R$$

$$D_2^R \Psi_{12}^{R^{-1}} = R_{21} D_1^R$$

Применяя  $\text{Tr}_{(1)}$  получаем:  $\Downarrow$

$$\boxed{D^R C^{R^{-1}} = \text{Id}_V}$$

Докажем  $\delta) \Rightarrow a)$

$$\text{Tr}_{(2)} \Psi_{12}^R R_{23}^R = P_{13}$$

Докажем на  $C_1^R$  слева и применим (12)

$$\text{Tr}_{(2)} R_{21}^{-1} C_2^R R_{23} = P_{13} C_3^R$$

Докажем на  $\Psi_{10}^{R^{-1}}$  и воспользуемся  $\text{Tr}_{(1)}$  — тут исполь-  
 зуем предположение косо-обратимости  $R^{-1}$ :

$$\text{Tr}_{(2)} P_{20} C_2^R R_{23} = \text{Tr}_{(1)} P_{13} \Psi_{30}^{R^{-1}} C_3^R$$

↙ по циклу под знаком  $\text{Tr}_{(2)}$

$$\Downarrow$$

$$C_0^R R_{03} = \Psi_{30}^{R^{-1}} C_3^R$$

Применим  $\text{Tr}(\circ)$  :

$$\boxed{\text{Id}_V = D^{R^{-1}} C^R}$$

откуда, в частности, следует строгая косо-обратимость

$R$ .  
Мы камеренно провели доказательства  $a) \Rightarrow b)$  и  $b) \Rightarrow a)$  - так, чтобы получились обе формулы (14)

Отсюда следует, что: обратимость  $D^R \Leftrightarrow$  обратимость  $C^R$ .  
Рассуждение  $a) \Rightarrow b)$  можно провести и в предположении обратимости  $C^R$  (попробуйте)  $\square$

Утверждение 5: Пусть  $M \in \text{Mat}_N(U)$ , где

$U$  - произвольное линейное пространство, то есть,  $M$  - матрица размера  $N \times N$ , зыи компоненты  $\in U$ .

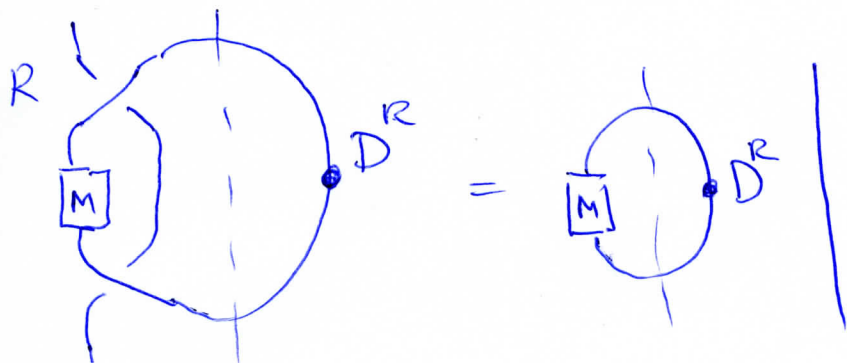
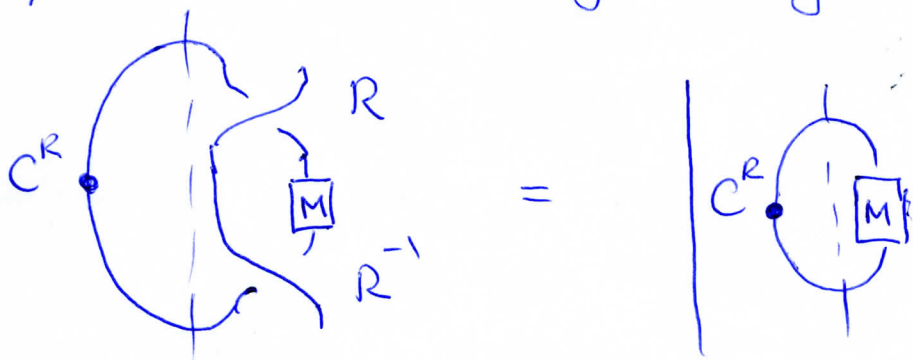
Пусть  $R$  - косо-обратимая  $R$ -матрица. Тогда

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Tr}_{(1)} C_1^R R_{12}^E M_2 R_{12}^{-E} &= I_2 \text{Tr}(C^R M) \\ \text{Tr}_{(2)} D_2^R R_{12}^E M_1 R_{12}^{-E} &= I_1 \text{Tr}(D^R M) \end{aligned}} \quad (15)$$

Доказательство: Будем использовать формулы (\*) со стр. 15:

Умножение 1-й и 2-й формулы на  $M_4/M_0$  и возмещение  $\text{Tr}_{(4)}/\text{Tr}_{(0)}$  даёт соотношение (15)  $\square$

Соотношения (15) имеют графическую интерпретацию, аналогичную 2-му движению Рейдемейтера:



Эти соотношения нам пригодятся в дальнейшем при изучении структуры квантовых матричных алгебр.

Утверждение 6. Пусть  $R$  — строго косо-обратимая рекевская  $R$ -матрица. Тогда:

$$\begin{aligned} D^R &= (1 - \lambda \text{Tr} D^R) D^{R^{-1}} \\ C^R &= (1 - \lambda \text{Tr} C^R) C^{R^{-1}} \end{aligned} \quad (16)$$

~~Доказательство~~

$$\boxed{\text{Tr} D^R = \text{Tr} C^R} \quad (17)$$

Доказательство: Для проверки (16) надо возвести  $\text{Tr}_{(1)} C^R$  или  $\text{Tr}_{(2)} D^R$  от соотношения  $R_{12}^{-1} = R_{12} - \lambda I_{12}$ .

Соотношение (17) следует из (16) и (14)



Реш: При канонических преобразованиях  $R$ -матриц (21)

$$R_{12} \mapsto (X_1 X_2) R_{12} (X_1 X_2)^{-1} \quad C^R \text{ и } D^R \text{ ведут себя:}$$

$$C^R \mapsto X C^R X^{-1}, \quad D^R \mapsto X D^R X^{-1}, \quad X \in \text{Aut}(V)$$

поэтому  $C^R$  и  $D^R$  могут рассматриваться как оператор

$$C^R, D^R \in \text{Aut}(V)$$

Пример: Для Дринкель-Димидовской  $R$ -матрицы (7)

возьмем

$$\Psi^R = q^{-1} \sum_{i=1}^N e_{ii} \otimes e_{ii} + \sum_{i \neq j} \frac{1}{x_{ij}} e_{ij} \otimes e_{ji} - \sum_{i < j} \frac{1}{q^{2(j-i)}} e_{ii} \otimes e_{jj}$$

$$C^R = \sum_i \frac{1}{q^{2i-1}} e_{ii} = \text{diag} \{ q^{-1}, q^{-3}, \dots, q^{-2N+1} \}$$

$$D^R = \sum_i \frac{1}{q^{2N-2i+1}} e_{ii} = \text{diag} \{ q^{-2N+1}, \dots, q^{-3}, q^{-1} \}$$

$$\text{Tr} C^R = \text{Tr} D^R = \frac{[N]_q}{q^N},$$

$$D^{R^{-1}} = q^{2N} D^R, \quad C^{R^{-1}} = q^{2N} C^R$$

Упражнение 7.\* Возьмите  $\Psi^R, D^R, C^R$  для  $R$ -матрицы Куши-Скленкина из упражнения 5\*, стр 10

## R-матрицы и инварианты узлов / зацеплений

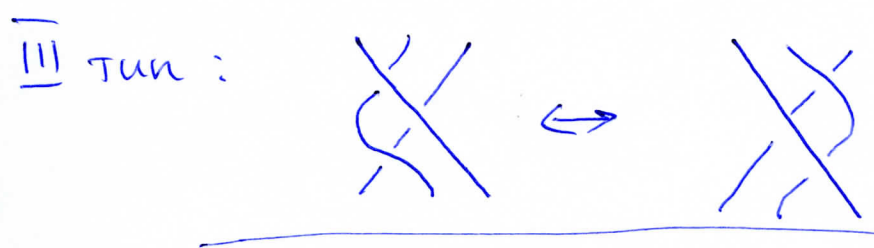
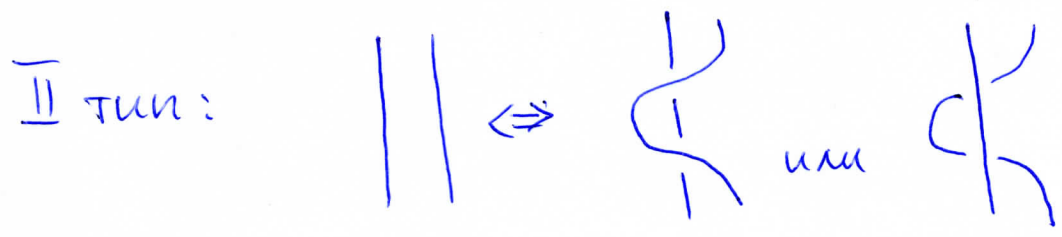
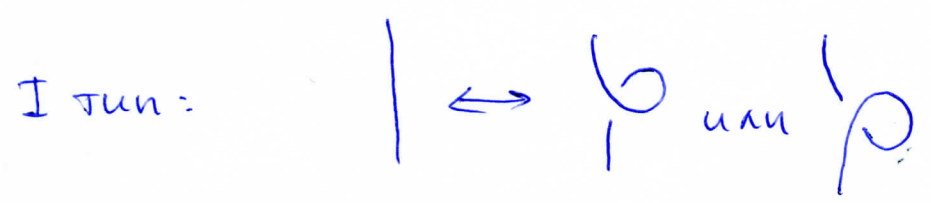
В этом разделе мы кратко опишем конструкцию инвариантов узлов / зацеплений, использующую R-матричные представления групп кос. Для этого нам потребуются результаты о связях узлов / зацеплений и кос.

Узел — класс изотопий замкнутых кривых без самопересечений в  $\mathbb{R}^3$ . Зацепление — класс изотопий нескольких замкнутых кривых в  $\mathbb{R}^3$  без само- и взаимных пересечений.

Узел / зацепление однозначно определяется регулярной проекцией одной из представляющих его ~~кривых~~ (наборов) кривых в  $\mathbb{R}^2$ . Регулярными называются проекции, когда в одной точке проекции накладываются не более двух точек исходной кривой, причем для двух пересекающихся в проекции отрезков кривой указывается кто над кем проходит (относительно плоскости проекции).

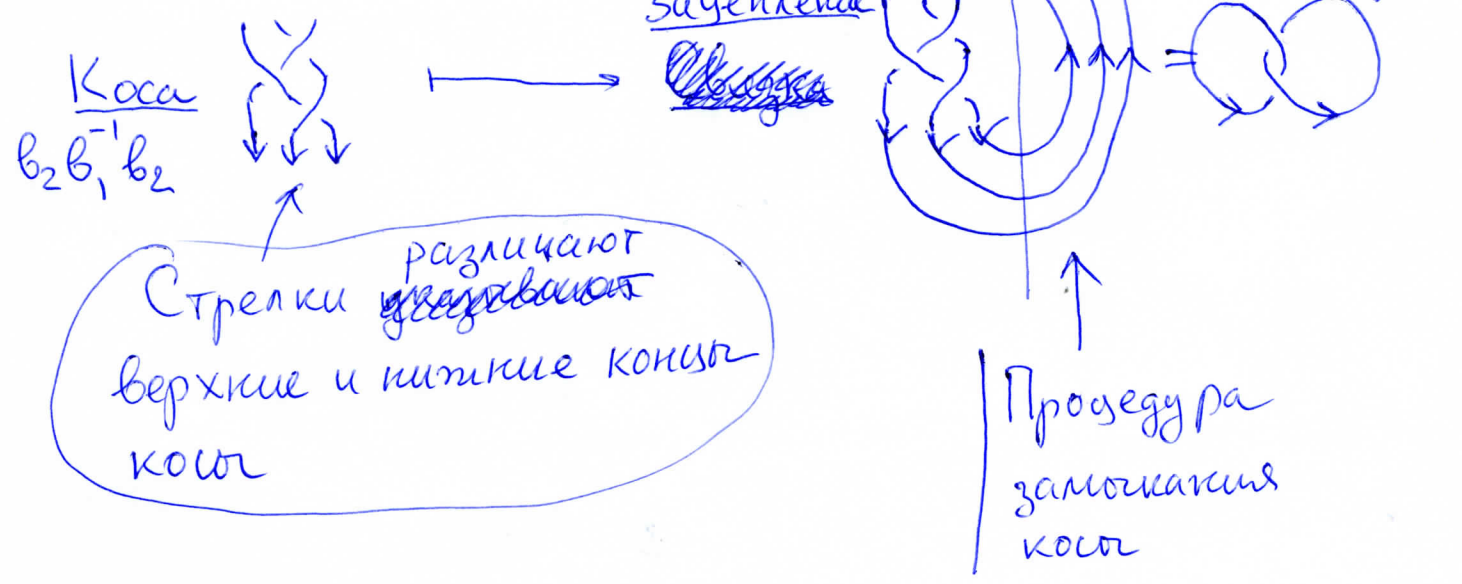
Регулярные проекции, отвечающие одному узлу / зацеплению, связаны между собой (конечной) последовательностью движений Рейдемейстера (1920гг)

Напомним эти движения:



На всяком узле/зацеплении можно ввести ориентацию, указав направления движения вдоль его замкнутых кривых. Очевидно, что всякой ~~ориентации~~ косе можно сопоставить ориентированный узел/связку:

Пример:



Теорема (Александр, 1928) Всекой ориентированной связке/узлу можно сопоставить замкание некоторой косы (вообще говоря, не единственным образом).

Мы не будем детально расписывать доказательство.

Приведем простейший пример сопоставления

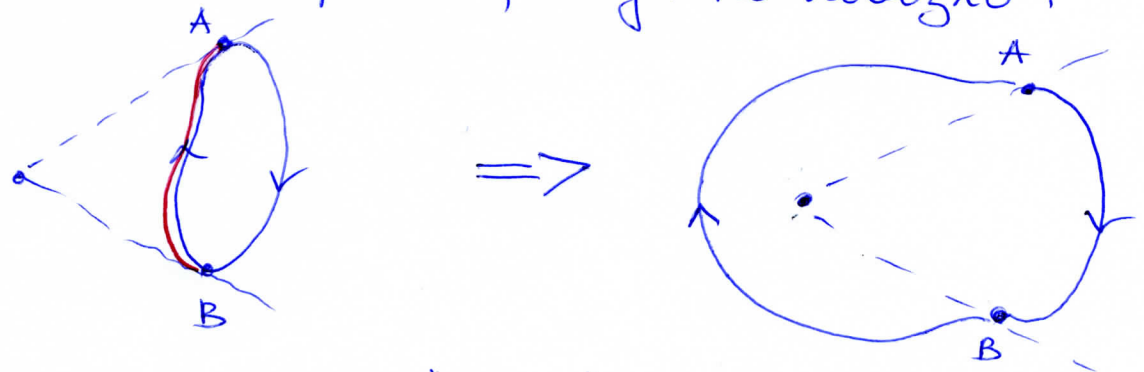


Отмечаем точку внутри, воукаем из нее нуг и начинаем его вращать, скажем, по часовой стрелке.

Как повезло, что все линии ~~соединяются~~ узла, пересекающие этот нуг, ориентированы одинаково — по часовой стрелке. Поэтому мы крутим нуг и отмечаем, через какие перекрестья линий он проходит: всегда он пересекается 2-мя линиями, при вращении нуга они перекрещиваются 3 раза, причем каждый раз дальше от ~~к~~ начала нуга линиям проходит над ближней. Соответственно, трилистнику сопоставляется замкание косы  $v_1^3 \in B_2$ .



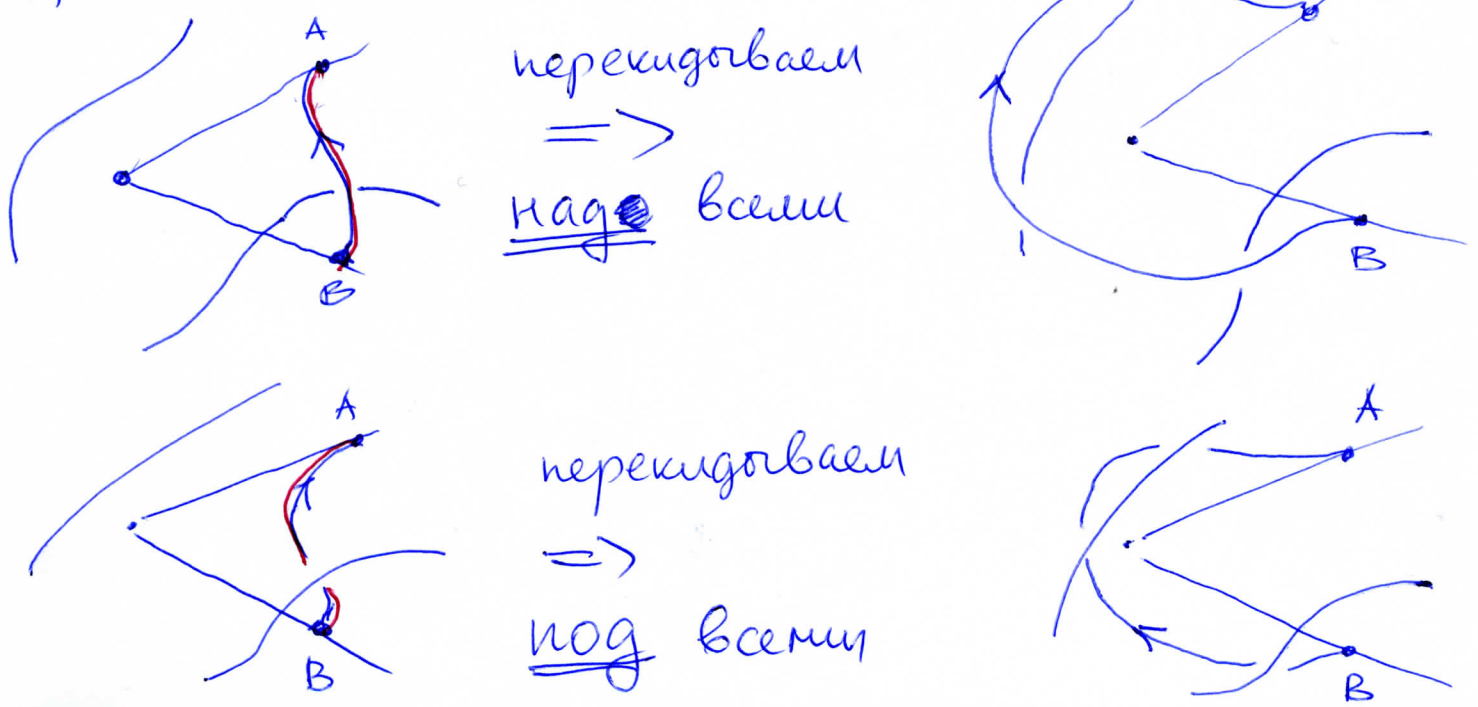
Простейший вариант, когда не повезло:



На рисунке сверху "плохо" выбран центр вращающегося мота. В результате 1) число линий, которое его пересекает переметно: 0 или 2 2) линии пересекают мот в разных направлениях. Все это решится процедурой "перекидовки" плохого (т.е. неправильно направленного - красного) отрезка узла через центр вращения - см. рис. справа.

В общем случае, при перекидовании неправильно ориентированного участка узла/зацепления надо учесть положение перекидываемого участка ~~по~~ по отношению к остальным, пересекающимся с ним на проекции участкам узла/зацепления.

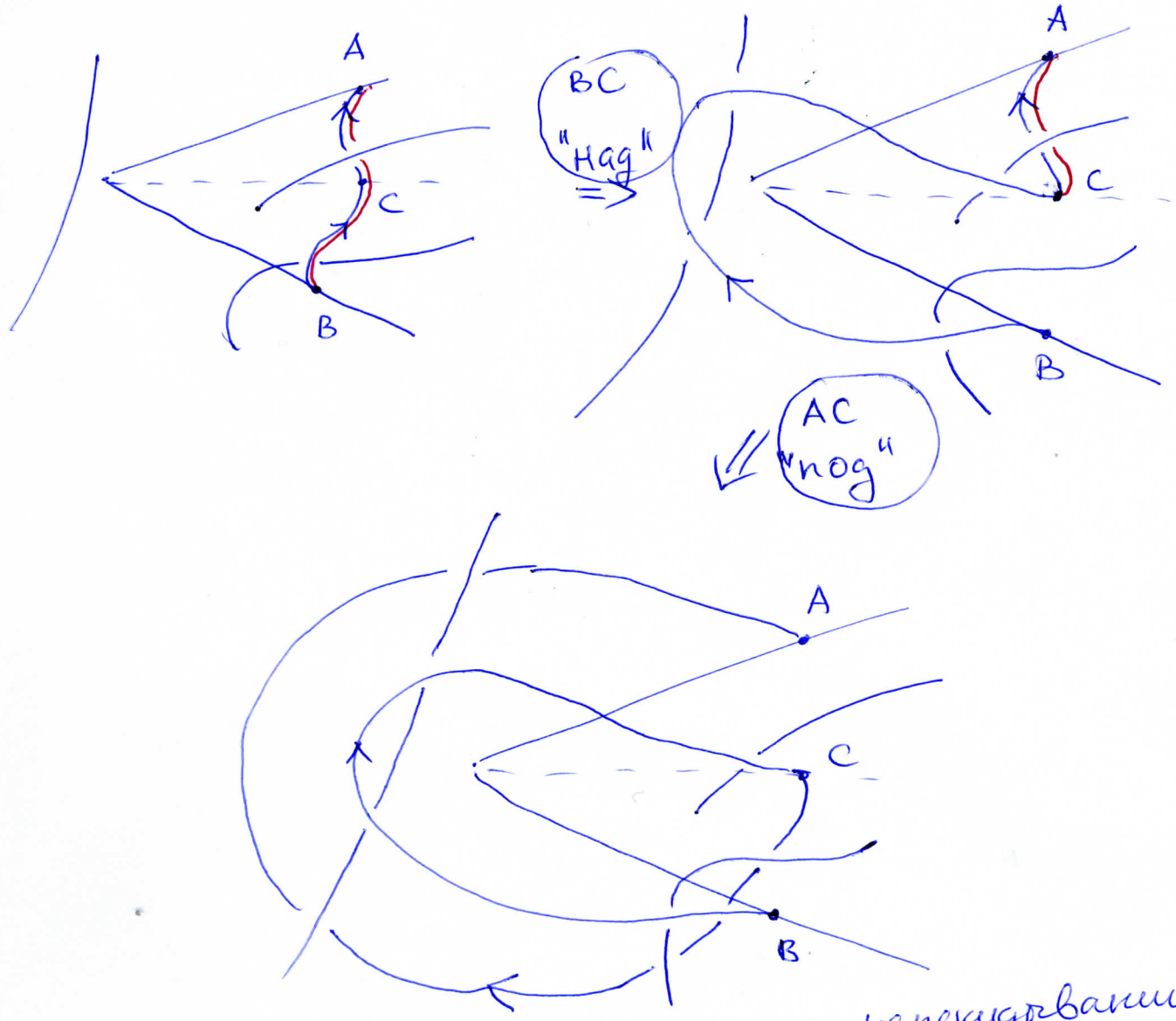
Правила перекидовки:



перекидываем  
=>  
над всеми

перекидываем  
=>  
под всеми

В более сложных случаях неправильно ориентированный участок приходится разбивать на куски:



Таким образом за конечное число перекидываний участка исправится все неправильно ориентированные куски узла/зацепления.

Представленный ~~метод~~ <sup>метод</sup> — ~~самый~~ наиболее удобный предложенный Александром способом восстановления замкнутого кноса по ориентированному узлу/зацеплению. Он каждем, но не поддается хорошей алгоритмизации.

Хороший алгоритм восстановления замкнутой кноса по узлу/зацеплению был предложен Вожелем (Vogel, 1990)

Описание этого алгоритма можно найти в книге "Теория узлов", Мантуров В.О. - Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005, глава 9, § 9.2.

или в книге "Группа кос", К. Кассель, В.Г. Тураев, МЛНМО, 2014, глава 2 § 2.4

Соответствие ориентированному узлу/зацеплению замыкания косы неоднозначно. Семейство замыканий кос, соответствующих одному узлу/зацеплению описывается теоремой А.А. Маркова. Эта теорема, сформулированная в 1936г., получила детальное доказательство лишь в 1974г. (Т. Витман)

Теорема (Марков) Две косы, замыкающие которых даёт один и тот же ориентированный узел/зацепление, связаны конечной последовательностью преобразований 2-х видов (марковских преобразований)

а) сопряжение в  $V_n$ : для  $\forall x \in V_n$   
$$x \mapsto axa^{-1} \quad \forall a \in V_n$$

б) связь кос  $V_n$  и  $V_{n+1}$

$$\forall x \in V_n : x \leftrightarrow x v_n^\varepsilon \in V_{n+1}, \quad \varepsilon = \pm 1$$

Это преобразование можно производить в обе стороны.

Эту теорему мы приводим без доказательства (см. ...)

Теперь опишем процедуру построения инвариантов в узлов/зацеплений по  $R$ -матричному представлению группы кос, предложенную В. Тураевым (1988).

Пусть  $R$  — строго косо-обратимая  $R$ -матрица геккевского типа. Всякой косо-сопоставимости её  $R$ -матричное представление:

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} \swarrow \\ i \\ \searrow \\ i+1 \end{array} &= v_i \xrightarrow{P_R} \alpha R_i \in \text{Aut}(V^{\otimes n}) \\ \begin{array}{c} \swarrow \\ i \\ \searrow \\ i+1 \end{array} &= v_i^{-1} \xrightarrow{P_R} \frac{1}{\alpha} R_i^{-1} \end{aligned} \quad (19)$$

Параметр  $\alpha \in \mathbb{C}^\times$  — масштабный параметр — мы зафиксируем подходящим образом в дальнейшем.

Для каждой косо  $X \in V_n$  мы сопоставим вписанную следующую следя в её  $R$ -матричном представлении (19):

$$\begin{array}{c} \text{Diagram: A box labeled } X \text{ with } i, 2, \dots, n \text{ above it and } \downarrow \downarrow \downarrow \text{ below it, inside a larger loop structure.} \end{array} \xrightarrow{\frac{1}{\alpha^n} \text{Tr}_{(1,2,\dots,n)} D_1^R D_2^R \dots D_n^R \mathcal{P}_R(X)} \quad (20)$$

Построенная по рецепту (20) функция уже инвариант движений Рейдемейстера II и III типов (в косе X) — просто потому, что мы используем при ее построении представление группы кос. Если мы хотим, чтобы эта функция была инвариантом узла/зацепления, отвечающего замощению косы X, надо обеспечить инвариантность этой функции при марковских преобразованиях.

Инвариантность относительно преобразований сепарации гарантируется циклическим свойством следа, а также свойством коммутативности:

$$[D_1^R D_2^R \dots D_n^R, \rho_R(Y)] = 0 \quad \forall Y \in V_n,$$

следующим из (13). (стр 16)

Инвариантность при преобразованиях Маркова вида  $x \leftrightarrow x v_n$ ,  $x \in V_n$ , следует из (11):

$$\left( \frac{1}{x} \text{Tr}_{(2)} D_2^R \right) \rho_R(v_1) = \frac{1}{x} \text{Tr}_{(2)} D_2^R \cdot x R_{12} = I_1,$$

или в картинках:



Инвариантность при преобразованиях Маркова вида  $x \leftrightarrow x v_n^{-1}$ ,  $x \in V_n$ , обеспечивается выбором  $x$ :

$$\left(\frac{1}{\alpha} \text{Tr}_{(2)} D_2^R\right) \rho_R(b_1^{-1}) = \frac{1}{\alpha} \text{Tr}_{(2)} D_2^R \frac{1}{\alpha} R_{12}^{-1} =$$

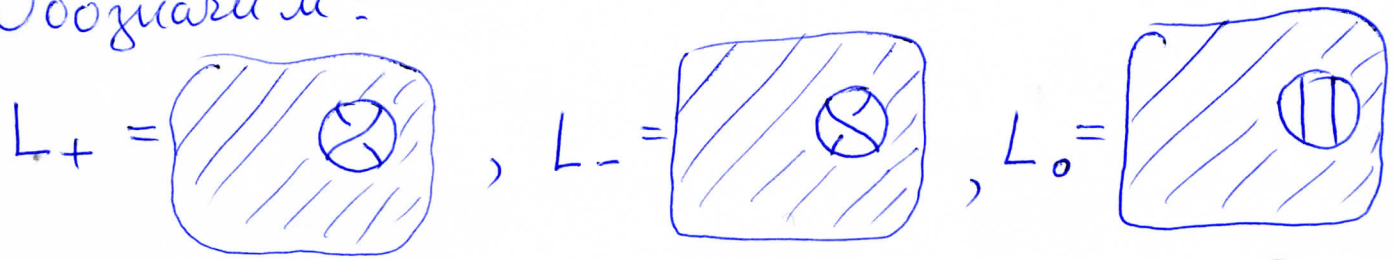
$$= \frac{1}{\alpha^2} \text{Tr}_{(2)} \underbrace{\left(1 - \lambda \text{Tr} D^R\right) D_2^{R^{-1}} R_{12}^{-1}}_{D_2^R \text{ (см. (16))}} = \frac{1 - \lambda \text{Tr} D^R}{\alpha^2} I_1 \quad (21)$$

требуется:  $\alpha = (1 - \lambda \text{Tr} D^R)^{1/2}$

С таким выбором  $\alpha$  формулы (19), (20) поставляют нам инварианты узлов/зацеплений.

В случае, когда  $R$  — Дринкель-Димитровская  $R$ -матрица (7), можно выбрать  $\alpha = q^{-N}$  (см. (18))

Обозначим:



три узла/зацепления, отличающиеся друг от друга лишь расположением двух кусков нитей в одном, обозначенном на рисунках месте.

Для узла/зацепления  $L$  обозначим  $f(L)$  — инвариант, вычисленный по рецепту (19)–(21).

Утверждение 6. Инвариант  $f(L)$  однозначно характеризуется скейн-соотношением (skein relation)

$$\left[ \frac{1}{\alpha} f(L_+) - \alpha f(L_-) = \lambda f(L_0) \right] \quad (22)$$

и значением на тривиальном узле  $\bigcirc$ :

$$f(\bigcirc) = \frac{1}{\lambda} \text{Tr} D^R = \frac{1-\lambda^2}{\lambda} \quad (23)$$

Доказательство:

Во-первых, заметим, что соотношения (22) для инварианта  $f$  являются следствием условия Гекке на  $R$ -матрицу:  $R_{12} - R_{12}^{-1} = \lambda I_{12}$ .

Значение  $f(\bigcirc)$  (23) получается простым вычислением.

Покажем теперь однозначность задания  $f(L)$  с помощью соотношений (22), (23). Соотношения (22) позволяют распутать любой узел/зацепление, то есть свести его к линейной комбинации тривиальных зацеплений:  $f(\bigcirc^k)$ . Для вычисления последних используем скейн-соотношение для узлов

$$L_+ = \boxed{x} \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \bigcirc, \quad L_- = \boxed{x} \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \bigcirc, \quad L_0 = \boxed{x} \square \bigcirc$$
$$L_+ = L_- = \boxed{x} \square$$

$$\text{Имеем: } \left[ \left( \frac{1}{\lambda} - \lambda \right) f(\boxed{x} \square) = \lambda f(\boxed{x} \square \bigcirc) \right]$$

$$\text{В частности } f(\bigcirc^{k+1}) = \frac{1-\lambda^2}{\lambda} f(\bigcirc^k),$$

и с учётом (23) вычислим

$$f(\bigcirc^k) = \left( \frac{1-\lambda^2}{\lambda} \right)^k \quad (24)$$



Реш: Инвариант  $f(L)$  (22)-(23) (или (19)-(21)) (32)

можно считать зависящими от двух независимых параметров  $x$  и  $q$  ( $\lambda = q - \frac{1}{q}$ ). Это, с точностью до нормировки, инвариант ФУНЛМО (Freyd, Yetter, Kostelnyk, Lickorish, Millett, Ocneanu, 1985). Как следует из наших ~~рассуждений~~ построений, ~~это~~ — это наиболее общий вид инвариантов узлов/зацеплений, которые можно построить с помощью геккевских  $R$ -матриц.

Однопараметрический частный случай:  $\lambda = q - q^{-1}$ ,  $x = q^{-2}$  (с точностью до замены параметра и нормировки) является инвариантом Дюкса (Jones, 1985). Он строится по  $q$ -Дринкельд-Димидовской  $R$ -матрице (7) в простейшем случае  $\dim V = N = 2$ .

Предельный переход  $x \rightarrow 1$  с нормировкой  $f(0) = 1$  даёт инвариант Александра-Ковца (Alexander 1923, Conway 1969). Для него  $f(0^k) = 0$  при  $k > 1$ .

### Примеры.


1) Трилистник:


$$\begin{aligned}
 f(\text{Трип.}) &= \frac{1}{x^2} \text{Tr}_{(1,2)} D_1^R D_2^R (x R_{12})^3 = \left( \begin{array}{l} \text{учтём условие} \\ \text{Гекке} \end{array} \right) \\
 &= x \text{Tr}_{(1,2)} D_1^R D_2^R (R_{12} + \lambda R_{12}^2) = \\
 &\stackrel{!}{=} x \text{Tr}_{(1,2)} D_1^R D_2^R ((1 + \lambda^2) R_{12} + \lambda I_{12}) = \\
 &= x \text{Tr} D^R \cdot \left\{ (1 + \lambda^2) + \lambda \text{Tr} D^R \right\} = \left( \begin{array}{l} \text{учтём } \text{Tr} D^R = \frac{[N]_q}{q^N} \\ \text{для } R\text{-матрицы} \\ \text{Дринкельда-Димидова} \end{array} \right) \\
 &= q^{-2N} [N]_q (1 + \lambda^2 + \lambda q^{-N} [N]_q) =
 \end{aligned}$$

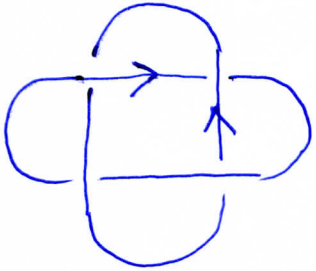


$$f(\text{Триг.}) = q^{-2N} [N]_q (q^2 + q^{-2} - q^{-2N}) \quad \text{||} \quad (33)$$

Упражнение 8. Вычислите инвариант  $f$  (для  $R$ -матрицы Дринделда-Джимбо) для зеркального отражения трилистника. Убедитесь, что трилистник и его зеркальное отражение — разные узлы.

Упражнение 9 Постройте более простое, чем приведенное на стр 23 замыкающие косы, отвечающее зацеплению Хопфа . Вычислите для него инвариант  $f(L)$ .

Упражнение 10 Для узла "восьмерка" построите  отвечающее ему замыкающие косы (простейшее из них находится в  $B_3$ ). Вычислите инвариант  $f(L)$ .

Упражнение 11\* Для зацепления, построите  замыкающие косы (простейшее — в  $B_4$ ). Для этого стоит использовать алгоритм Вонеля. Вычислите инвариант  $f(L)$ .