

Задачи к 06.03

Из прошлых задач остаются задача про сложение точек на кубике и доказательство независимости оператора D_a от выбора проективных координат.

- (1) Докажите, что если точка a лежит на неособой кубической кривой X , то полярную конику $P_a X$ можно описать как геометрическое место таких точек d , что прямая ad пересекает кубику X в таких двух точках b и c , отличных от a , что пара точек a и d гармонически делит пару b и c .
- (2) Докажите, что гессиан пересекает неособую кубику трансверсально.
- (3) Докажите, что пересечение кривой с ее гессианом в точности совпадает с объединением множества особых точек и множества точек перегиба этой кривой. (Мы доказывали включение в одну сторону; надо проследить, что на самом деле все переходы равносильны.)
- (4) Как устроена поляра к кубике в ее точке перегиба?
- (5) Докажите, что прямая, проходящая через две точки перегиба кубической кривой пересекает ее в третьей точке, также являющейся точкой перегиба.
- (6) Пусть дано некоторое конечное множество, элементы которого мы будем называть "точками" и некоторое множество его трехэлементных подмножеств, которые мы будем называть "прямыми", так что любые две различные "точки" содержатся в единственной "прямой". Сколько элементов может быть в таком множестве? Знаем ли мы какие-нибудь известные конфигурации такого рода. (Одна была сходно предложена на семинаре: аффинная плоскость над полем из трех элементов.) Можно ли найти такие конфигурации на вещественной или комплексной проективной плоскости, так чтобы "прямые" были настоящими прямыми (т.е. тройками точек, лежащих на одной прямой)?