2020г. Задание к теме
"R-матрицы и инварианты зацеплений"

1 (Представление Бурау) Докажите, что формула (1в) (стр. 2 Записок лекций) задаёт представление алгебры Гекке $H_n(q)$. Выделите 1-мерное подпредставление в этом n-мерном представлении.

2 а) Убедитесь, что R-матрица Дринфельда-Джимбо (7) (стр. 8 Записок) удолетворяет соотношению кос (3) и условию Гекке (5) (Используйте комментарии на стр. 8–10 Записок).

б) Проделайте ту же проверку для R-матриц Кулиша-Склянина:

типа $GL(1|1)$: $2^2 \times 2^2$ матрица

$$R = \left(\begin{array}{cc|cc} q & & & \\ & \lambda & 1 & \\ \hline & 1 & & \\ & & & -q^{-1} \end{array}\right) \qquad \lambda := q - q^{-1}$$

типа $GL(1|2)$: $3^2 \times 3^2$ матрица

$$R = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} q & & & & & & & & \\ & \lambda & & 1 & & & & & \\ & & \lambda & & & & 1 & & \\ \hline & 1 & & 0 & & & & & \\ & & & & -q^{-1} & & & & \\ & & & & & \lambda & & -1 & \\ \hline & & 1 & & & & 0 & & \\ & & & & & -1 & & 0 & \\ & & & & & & & & -q^{-1} \end{array}\right]$$

в) То же самое для R-матрицы Креммера-Жерве (Cremmer-Gervais)

Тип $GL(3)$:
9×9 матрица

$$R = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
q & & & & & & & & \\
 & \lambda & & 1 & & & & & \\
 & & \lambda & & -1 & & q^{-1} & & \\
\hline
 & 1 & & 0 & & & & & \\
 & & & & q & & & & \\
 & & & & & \lambda & & 1 & \\
\hline
 & & q & & q^2 & & 0 & & \\
 & & & & & 1 & & 0 & \\
 & & & & & & & & q
\end{array}\right]$$

г) Проверьте выполнение соотношения кос для R-матрицы

Тип $O(3)$:
$3^2\times 3^2$ матрица

$$R = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
q & & & & & & & & \\
 & \lambda & & 1 & & & & & \\
 & & \lambda(1-\frac{1}{q}) & & \lambda q^{-\frac{1}{2}} & & q^{-1} & & \\
\hline
 & 1 & & 0 & & & & & \\
 & & \lambda q^{-\frac{1}{2}} & & 1 & & 0 & & \\
 & & & & & \lambda & & 1 & \\
\hline
 & & q^{-1} & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & & 1 & & 0 & \\
 & & & & & & & & q
\end{array}\right]$$

---

3 а) Найдите собственные значения R-матриц из примеров б), в), г) 2-й задачи. Определите их кратности. Решите ту же задачу для R-матриц Дринфельда-Джимбо размеров $2^2\times 2^2$ и $3^2\times 3^2$ из примера а) 2-й задачи

б) Для R-матрицы размера $2^2\times 2^2$ Дринфельда-Джимбо (тип $GL(2)$) убедитесь, что

$$\boxed{\rho_R\left(\begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline \ \\ \hline \ \\ \hline\end{array}\right)=0.}$$

Здесь ρ_R — R-матричное представление алгебр Ивахори-Гекке, порождаемое этой R-матрицей.

$\begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline \ \\ \hline \ \\ \hline\end{array}$ — примитивный идемпотент в $H_3(q)$, отвечающий 1-мерному представлению $g_{1,2}\mapsto -q^{-1}$.

Примечание. При проверке удобно воспользоваться выражением для идемпотента $\begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline \ \\ \hline \ \\ \hline\end{array}$ через бакстеризованные элементы (см (8) на стр 26 записок "Алгебры Ивахори-Гекке")

$$\begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline \ \\ \hline \ \\ \hline\end{array} \sim g_1(1)\,g_2(2)\,g_1(1) = g_2(1)\,g_1(2)\,g_2(1)$$

Откуда следует такое представление?

(*) Как выглядит его обобщение для идемпотента $\left.\begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline \vdots \\ \hline \ \\ \hline\end{array}\right\} n$ клеток?

в*) Для R-матриц размера $3^2\times 3^2$

* Дринфельда-Джимбо (тип $GL(3)$)
* Кремера-Жерве (тип $GL(3)$, пункт в) зад. 2)
* Ортогональной (тип $O(3)$, пункт г) зад. 2)

Проверьте: $\boxed{\operatorname{rk}\rho_R\left(\begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline \ \\ \hline \ \\ \hline\end{array}\right)=1}$

г*) Для R-матрицы размера $2^2\times 2^2$ Кулиша-Склянина (тип $GL(1|1)$) проверьте, что

$$\boxed{\rho_R\left(\begin{array}{|c|c|}\hline \ & \ \\ \hline \ & \ \\ \hline\end{array}\right)=0}$$

4 а) Проверьте формулы

$$\psi^R = q^{-1}\sum_{i=1}^{N} e_{ii}\otimes e_{ii} + \sum_{i\neq j}\frac{1}{x_{ij}}\, e_{ij}\otimes e_{ji} - \sum_{i<j}\frac{q-q^{-1}}{q^{2(j-i)}}\, e_{ii}\otimes e_{jj}$$

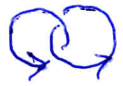
$$C^R = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{q^{2i-1}}\, e_{ii} = \mathrm{diag}\{q^{-1}, q^{-3}, \dots, q^{-2N+1}\}$$

$$D^R = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{q^{2N-2i+1}}\, e_{ii} = \mathrm{diag}\{q^{-2N+1}, \dots, q^{-3}, q^{-1}\}$$

для косо-обратной матрицы ψ^R к R-матрице Дринфельда-Джимбо (7) (стр 8 Записок) и связанных с ней матриц C^R, D^R.

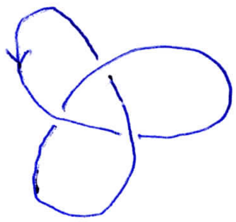
б) Вычислите матрицы D^R для R-матриц из задач 2 б), 2 г). (всего 3 R-матрицы)

Примечание: При вычислении удобно использовать соотношение $Tr_{(2)} D^R R_{12} = I_1$.

5 Постройте более простое, чем приведенное на стр. 23 Записок, замыкание косы, отвечающее зацеплению Хопфа . Вычислите для него инвариант $f(L)$ (см. стр. 28–30 Записок)

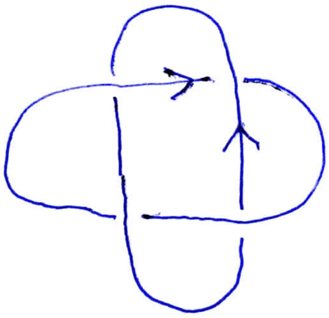
6 Постройте замыкание косы и вычислите инвариант $f(L)$ для следующих ориентированных зацеплений:

а) Зеркальное отражение трилистника



б) Узел "восьмерка" (имеет простейшее замыкание в B_3)

в)* Зацепление вида (имеет простейшее замыкание в B_4).



Примечание. При построении соответствующего замыкания косы легче воспользоваться алгоритмом Вожеля см. Прасолов, Сосинский "Узлы, зацепления, косы и 3-мерные многообразия". МЦНМО, 1997 г. § 6.6 на стр 84.