

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО – 2020  
Листок 3

срок сдачи 24.03.2020

1. Докажите, что если  $f(z)$  имеет полюс в  $z_0$  и голоморфна в её проколотой окрестности, то  $z_0$  существенно особая точка функции  $e^{f(z)}$ .

2. Покажите, что если целая функция  $f(z)$  принимает вещественные значения на вещественной оси и чисто мнимые на мнимой, то она нечётна.

3. Докажите, что если для некоторой области  $D$  и гладкой кривой  $\gamma \subset D$  функция  $f(z)$  голоморфна в  $D \setminus \gamma$  и непрерывна в  $D$ , то  $f(z)$  голоморфна во всей  $D$ .

4. Докажите, что всякая голоморфная и ограниченная в  $\mathbb{C} \setminus 0$  функция постоянна.

5. Докажите что функция  $e^{1/z}$  принимает в единичном круге все возможные значения из  $\mathbb{C} \setminus 0$ .

6. Покажите, что для всякого многочлена  $P(z)$  степени больше трёх с корнями  $a_1, \dots, a_n$  среди которых нет кратных выполняется

$$\frac{a_1}{P'(a_1)} + \dots + \frac{a_n}{P'(a_n)} = 0$$

7. Найдите вычет ( $n \in \mathbb{N}$ )

$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{dz}{(1 - e^{-z})^n}$$

8. Вычислите интеграл с помощью вычетов

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

9. Найдите сумму ряда и его радиус сходимости:

$$1 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}z^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}z^6 + \dots$$

10. Покажите, что если функция  $f(z)$  голоморфна и непостоянна в внутри единичного круга  $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  и для некоторых точек  $a_1, a_2 \in \Delta$  выполняется  $f(a_1) = f(a_2)$ , то найдутся такие несовпадающие точки  $b_1, b_2 \in \Delta$  что  $f(b_1) = f(b_2) \neq f(a_i)$ .