**Задачи к 13.03**

Из прошлых задач остается задача про сложение точек на кубике $X$.

**Задача 1.** Для двух различных прямых на $m$ и $n$ и точки $S \notin m \cup n$ на проективной плоскости через $p_{S,m,n}$ обозначим линейную проекцию (перспективное отображение) $m \xrightarrow{\sim} n$ с центром $S$. Пусть на комплексной проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ даны три различные прямые $l_1$, $l_2$ и $l$, $O = l_1 \cap l_2$, и две различные точки $S_1, S_2$ такие, что прямая $(S_1S_2)$ не проходит через току $O$. Рассмотрим проективное преобразование $f : l \xrightarrow{\sim} l$, получаемое как композиция трех перспективных отображений

$$f = p_{S_1,l_2,l} \circ p_{S_2,l_1,l_2} \circ p_{S_1,l,l_1}.$$

Как уже выяснено, точка $X = (OS_1) \cap l$ является неподвижной точкой преобразования $f$. Имеет ли $f$ отличную от $X$ неподвижную точку?

**Задача 2.** Пользуясь задачей 1, продумать, как можно доказать теорему Безу о том что две алгебраические кривые $X$ и $Y$ степеней $m$ и $n$ на комплексной проективной плоскости, неособые во всех точках пересечения и пересекающиеся в них трансверсально, имеют $mn$ точек пересечения.

**Задача 3.** Докажите, что гессиан неособой кубики $X$ пересекает кубику $X$ трансверсально.

**Задача 4.** Найдите гессиан и точки перегиба кубики Ферма $x^3 + y^3 = 1$.

**Задача 5.** Докажите, что если кривая задана в аффинных координатах уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$ — многочлен, то точки пересечения этой кривой с гессианом это в точности те точки, где $f''(x) = 0$.

**Задача 6.** Докажите, что пересечение кривой с ее гессианом в точности совпадает с объединением множества особых точек и множества точек перегиба этой кривой. (Мы доказывали включение в одну сторону; надо проследить, что на самом деле все переходы равносильны.)

**Задача 7.** Как устроена поляра к кубике в ее точке перегиба?

**Задача 8.** Докажите, что прямая, проходящая через две точки перегиба кубической кривой, пересекает ее в третьей точке, также являющейся точкой перегиба.

**Задача 9.** Пусть дано некоторое конечное множество, элементы которого мы будем называть "точками" и некоторое множество его трехэлементных подмножеств, которые мы будем называть "прямыми”, так что любые две различные "точки" содержатся в единственной "прямой". Сколько элементов может быть в таком множестве? Знаем ли мы какие-нибудь известные конфигурации такого рода? (Одна была сходу предложена на семинаре: аффинная плоскость над полем из трех элементов.) Можно ли найти такие конфигурации на вещественной или комплексной проективной плоскости, так чтобы "прямые" были настоящими прямыми (т.е. тройками точек, лежащих на одной прямой)?