Листок 1. 29 января 2020

Задача 1. Вывести формулу для подстановки векторного поля во внешнее произведение двух дифференциальных форм.

Задача 2. Доказать, что если два векторных поля касаются подмногообразия, то и их коммутатор касается этого подмногообразия.

Задача 3. Опишите все векторные поля на $\mathbb{R}^3$, локальный фазовый поток которых сохраняет форму dx.

Задача 4. Опишите все векторные поля на $\mathbb{R}^3$, локальный фазовый поток которых сохраняет распределение $dx = 0$.

Задача 5. а) Докажите, что для любых двух ненулевых внешних 1-форм α, β на конечномерном линейном пространстве V найдется автоморфизм A пространства V, такой что $A^*\alpha = \beta$.
б) Пусть α, β дифференциальные 1-формы, отличные от нуля в точке a. Докажите, что найдется диффеоморфизм g окрестности точки a, оставляющий точку a на месте и такой, что $g^*\alpha(a) = \beta(a)$. Приведите пример ненулевых 1-форм α, β для которых не найдется локального диффеоморфизма g, переводящего одну форму в другую.

Задача 6. Пусть α дифференциальная 1-форма, нигде не обращающаяся в ноль. Какие из следующих условий следуют одно из другого: (1) $\alpha \wedge d\alpha = 0$; (2) дифференциальная 2-форма $d\alpha$ делится на α, т.е. $d\alpha = \alpha \wedge \beta$ для некоторой дифференциальной 1-формы β; (3) для каждой точки x ограничение формы $d\alpha(x)$ на ядро формы $\alpha(x)$ равно нулю.

Задача 7. Рассмотрим распределение касательных гиперплоскостей, заданное 1-формой $\alpha = dz + a_1(z, x_1, ..., x_n)dx_1 + ... + a_n(z, x_1, ..., x_n)dx_n$ в пространстве с координатами $z, x_1, ..., x_n$. Пусть каждая из функций a_i обращается в ноль в нуле. Найдите векторные поля v_i, имеющие вид $\frac{\partial}{\partial x_i} + f_i \frac{\partial}{\partial z}$ (f_i - функция) и лежащие в гиперплоскостях поля $\alpha = 0$.
а) Вычислите значение в нуле коммутатора полей v_i, v_j.
б) Вычислите $d\alpha(v_i, v_j)$.

Задача 8. Пусть v, w – векторные поля на трехмерном многообразии, линейно независимые в каждой точке. Доказать, что натянутое на эти поля поле двумерных площадок интегрируемо если и только если векторные поля $[v, w]$, v, w линейно зависимы в каждой точке.

Задача 9. Рассмотрим векторные поля в $\mathbb{R}^3$ с координатами (x, y, z): $v = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$, $w = 2xz\frac{\partial}{\partial x} + 2yz\frac{\partial}{\partial y} + (z^2 + 1 - x^2 - y^2)\frac{\partial}{\partial z}$. Где эти поля линейно независимы? Для каких точек трехмерного пространства выполняется условие интегрируемости площадок, натянутых на эти поля? Найти все двумерные компактные интегральные многообразия соответствующего поля двумерных площадок.