ПЯТАЯ ВЫСОТА, ВШЭ, ТЛ "ДваждыДва" 22 марта 2020

Листок 18 Альфа **Комбинаторика II. Часть 1.**

Упражнение 1: десятиэтажном студенческом общежитии проживают 100 человек. Сколькими способами можно выбрать ответственного за уборку на каждом этаже (ответственный необязательно живет на том этаже, за который отвечает)? Сколькими способами можно выбрать 10 человек для субботника?

Упражнение 2: Сколькими различными способами можно избрать из 12-ти человек делегацию в составе 5-ти человек?

1. Когда Король Джон уснул Робин Гуд пробрался во дворец. В спальне Короля был сейф с кодовым замком из пяти цифр. Сколько раз Робин Гуду придется вводить код, если а) все цифры должны быть различны? б) цифры могут повторятся? Робин Гуд крайне не везуч!
2. В математический класс поступили 24 ученика. Сколькими способами они могут собраться в команду из 3 человек для участия в олимпиаде?
3. Кирилл решил накачать мускулы, поэтому начал ходить тренажерный зал. В зале 10 тренажеров. Кирилл решил каждый день заниматься на 5-ти тренажерах, причем он хочет, чтобы каждый день комбинации были разные. Сколько дней ему удастся следовать своему правилу?
4. В коробку поместили 15 шаров, нумерованных последовательно от 1 до 15. а) Сколькими способами можно вынуть 2 шара? б) 3 шара? в) 3 четных шара? г) 4 четных шара и 2 нечетных, но делящихся на три?
5. Встретились 11 футболистов и 6 хоккеистов, и каждый стал по одному разу играть с каждым в шашки. а) Сколько встреч было между футболистами? б) Сколько встреч было между хоккеистами? в) Сколько встреч было между футболистами и хоккеистами? г) Сколько встреч было всего?
6. Из 14-ти девушек и 12-ти юношей выбирают команду, состоящую из пяти человек. Сколькими способами это можно сделать, если в команду должно войти не более трёх юношей?

Комбинаторика II. Часть 2.

7. В 9 «А» классе учатся 25 учащихся, в 9 «Б» -20 учащихся, а в 9 «В» - 18 учащихся. Для работына пришкольном участке надо выделить трех учащихся из 9 «А», двух - из 9 «Б» и одного - из9 «В». Сколько существует способов выбора учащихся для работы на пришкольном участке?
8. Сколько различных слов можно получить из слова ПАРАЛЛЕЛОГРАМ, если а) переставить буквы в слове местами? б) переставить буквы так, чтобы все гласные и солгасные стояли в алфавитном порядке? в) переставить буквы так, чтобы все гласные стояли в алфавитном порядки?
9. В администрации университета работают 24 человека: по 2 от каждого из 12 факультетов. Сколькими способами можно выбрать делегацию из пятерых человек, если они все должны быть из разных разных факультетов?
10. Границы города имеют вид квадрата 600 м x 600 м, кварталы которого разбивают его на квадраты 100 м x 100 м. На всех кварталах введено одностороннее движение: можно ехать только на север или на восток. Сколькими способами можно доехать из юго-западной части города в северо-восточную?
11. В марафоне 18 участников. Бегуны стартуют группами по 6 человек в каждой. Сколькими способами можно распределить участников марафона по этим группам?

Комбинаторика II. Часть 3.

12. На книжной полке стоят 12 разных книг о приключениях. Сколькими способами можно переставить книги так, чтобы книга о Гарри Поттере всегда стояла а) слева от Властилина Колец? б) рядом с Властилином Колец?

13. В колоде из 36 карт присутствуют 4 туза. Сколькими способами можно вытащить из колоды 4 карты так, чтобы в наборе оказалось ровно 2 туза.

14. Дед Мороз красил елочные шары.Всего 20 штук. Сколькими способами он может их покрасить, если у него краски 3-х цветов, причем Дед Мороз использовал каждый из цветов хотя бы раз.

15. На плоскости дана незамкнутая несамопересекающаяся ломаная, в которой 37 звено (соседние звенья не лежат на одной прямой). Через каждое звено провели прямую, содержащую это звено. Получили 37 прямую, некоторые, возможно, совпали. Какое наименьшее число различных прямых могло получиться?

Комбинаторика II. Часть 3.

12. На книжной полке стоят 12 разных книг о приключениях. Сколькими способами можно переставить книги так, чтобы книга о Гарри Поттере всегда стояла а) слева от Властилина Колец по соседству? б) рядом с Властилином Колец?

13. В колоде из 36 карт присутствуют 4 туза. Сколькими способами можно вытащить из колоды 4 карты так, чтобы в наборе оказалось ровно 2 туза.

14. Дед Мороз красил елочные шары.Всего 20 штук. Сколькими способами он может их покрасить, если у него краски 3-х цветов, причем Дед Мороз использовал каждый из цветов хотя бы раз.

15. На плоскости дана незамкнутая несамопересекающаяся ломаная, в которой 37 звено (соседние звенья не лежат на одной прямой). Через каждое звено провели прямую, содержащую это звено. Получили 37 прямую, некоторые, возможно, совпали. Какое наименьшее число различных прямых могло получиться?

Комбинаторика II. Часть 3.

12. На книжной полке стоят 12 разных книг о приключениях. Сколькими способами можно переставить книги так, чтобы книга о Гарри Поттере всегда стояла а) слева от Властилина Колец? б) рядом с Властилином Колец?

13. В колоде из 36 карт присутствуют 4 туза. Сколькими способами можно вытащить из колоды 4 карты так, чтобы в наборе оказалось ровно 2 туза.

14. Дед Мороз красил елочные шары.Всего 20 штук. Сколькими способами он может их покрасить, если у него краски 3-х цветов, причем Дед Мороз использовал каждый из цветов хотя бы раз.

15. На плоскости дана незамкнутая несамопересекающаяся ломаная, в которой 37 звено (соседние звенья не лежат на одной прямой). Через каждое звено провели прямую, содержащую это звено. Получили 37 прямую, некоторые, возможно, совпали. Какое наименьшее число различных прямых могло получиться?

Упр 1 а) Здесь для нас имеет значение, кто на каком этаже дежурит. Однако нас абсолютно не волнует, как там разместились остальные 90 человек. В итоге: 100!/90! б) В этом случае для нас не важно, как между собой участников субботников перемешались, поскольку у них у всех один и тот же фронт работ. Про тех, кого не выбрали, мы уже говорили)) В итоге: 100!/(90!10!)

Упр 1 Вспего 12 человек, которые участвуют в отборе. Из них выбрали 5 человек избрано в делегацию, причем не важно в каком порядке их выбирали. Тех 7 человек, которых не выбрали, тоже могут перемешиваться, как хотят: 12!/(5!7!)

1. а) Всего цифр 10. Из них выбираем 5 штук, при это не важно, как перешались те цифры, которые не попали в код. 10!/5! = 10х9х8х7х6 б) на каждом месте пароля может стоять 1 из 10 цифр, тогда всего 10^5

2. Всего 24 человека. Из них выбираем 3 человека, которые могут быть выбраны в любом порядке. Для 22, которых не выбрали тоже порядок не важен. И того 24!/(3! 22!)

3. Так как Кирилл может занимается в 1 день только на 5 тренажёрах по 10!/5! = 10*9*8*7*6=30240 различных комбинаций. Так как в один день нельзя занимается на одинаковых по 5!=120, значит 30240 : 120=252

4. а) Всего из 15 два шара можно вытащить способами 15!/13! = 15*14=210, т.к. порядок не важен, нужно разделить на число перестановок 210:2=105. б) Три шара 15!/(13!3!) = 15*14*13:6=455. в) четных шаров 7 штук. Из них вытаскиваем 4 штуки. Всего способов выбрать 4 четных шара: 7!/(4! 3!), нечетных шаров, которые делятся на 3, всего 3. Из них вытащили 2 штуки. Всего способов выбрать 2 нечтных шара, которые делятся на 3: 3!/(2! 1!). Всего (7!/(4! 3!)) х (3!/(2! 1!))

5. а) Для 11 футболистов 11*10:2= 55 б) для 6 хоккеистов 6*5:2=15, в) для хокеистов с футболистами 6*11 г) для всех 17*16:2=153

6. Раз уж не более 3-х юношей, то придется рассмотреть несколько случаев. Пусть юношей 0, тогда команда будет из 5 девушек, которых выбираем 14!/(9!5!). Пусть юношей 1, тогда команда будет из 4 девушки и 1 юноши. Их можно выбрать (14!/(4!10!))х(12) Пусть юношей 2, тогда команда будет из 3 девушки и 2 юношей. Их можно выбрать (14!/(3!11!))х(12!/(2!10!)) Пусть юношей 3, тогда команда будет из 2 девушки и 3 юношей. Их можно выбрать (14!/(2!12!))х(12!/(3!9!)) Каждый набор в команду с разным количеством юношей никак не связан с остальными, поэтому количество комбинаций необходимо складывать: 14!/(9!5!) + (14!/(4!10!))х(12) + (14!/(3!11!))х(12!/(2!10!)) + (14!/(2!12!))х(12!/(3!9!))

7. В 9А из 25 человек выбираем 3-х (25!/(3!22!)), в 9Б из 20 человек выбираем 2-х (20!/(18!2!)), а в 9В из 18 человек выбираем 1 (18). Для каждого набора избранных из 9А, выбираются свой набор из 9Б, а затем свой набор из 9В, поэтому комбинации перемножаются. В итоге (25!/(3!22!)) х (20!/(18!2!)) х 18

8. а) В слове параллелограмм 14 букв. Если бы все буквы были разными, то их можно было бы переставить 14! разных способов. Однако у нас есть 3 буквы «А», 3 буквы «Л», 2 буквы «Р» и 2 буквы «М». Перестановка одинаковых букв не дает новых комбинаций, поэтому итоговое количество таково 14!/ (3!3!2!2!) б) Если гласные в алфавитном порядке, то местами между собой они не могут меняться. Аналогично для согласных. Значит, если выберем, как расставить гласные, то положение согласных будет определено однозначно. Всего гласных 5 штук. Выбрать места для них можно 14!/(5!9!) - таково и будет общее число комбинаций. в) если же мы же у нас только гласные в алфавитном порядке, то тогда количество комбинаций увеличится во столько, сколькими способами можно переставить согласные (14!/(5!9!)) х (9!/(2!2!3!))

9. Сначала выбираем 5 факультетов из 12. Это можно сделать 12!/(5! 7!) способами. Из каждого факультета выбираем 1 из 2 представителей. Итог: (12!/(5! 7!)) х 2

10. Каким бы маршрутом мы не шли, нам предстоит пройдем всего лишь 11 перекрестков. При этом только лишь на 5 из них мы можем выбрать движение на восток, а в остальных 6-ти случаях придется двигаться на север. То есть если мы выбрали перекрестки, на которых движемся на восток, то это и определяет общее число разных маршрутов. Это можно сделать 11!/(5!6!) разными способами

11. Собираем первую группу. Из 18 выбираем 6-х ребят - это можно сделать 18!/(6!12!). Далее набираем вторую группу. У нас осталось 12 человек и из них мы набираем еще 6-х - это можно сделать 12!/(6!6!). Оставшие в полном составе попадают в последнюю группу. Итог: (18!/(6!12!)) x (12!/(6!6!))

12. а) Представим, что у нас Гарри Поттер и Властилин Колец слиплись в одну книжку (положение Гарри однозначно определяет положение Властилина Колец). Получается эти 11 (одна слипшаяся, поэтому 12 - 1) можно переставить 11! разными способами. б) Властилин может стоять либо слева, как в пунте а (11!), либо справа (тоже 11!). То есть всего 11! x 2 способов

13. Выбираем 2 туза из 4-х. Это можно сделать 4!/(2!2!) способами. Из оставшихся 32-х карт нужно выбрать еще две карты. Это можно сделать 32!/(2!30!) способами. В итоге (4!/(2!2!)) x (32!/(2!30!))

14. Раз у нас ломанная без самопересечений, то тогда в точках пересечения прямых, на которых лежат звенья, пересекаются не более двух прямых. При этом у нас должно быть 36 (37 - 1) точек пересечения. Если прямых не более 9, то их количество пересечений будет равно 9!/(7!2!) = 9 x 8/2 = 36. То есть нам хватит 9-ти прямых