ПЯТАЯ ВЫСОТА, ВШЭ, ТЛ "ДваждыДва" 01 марта 2020

Сдедующее занятие 9-ого марта!!!

Листок 16 Альфа **Инвариант. Часть 1.**

Упражнение 1: На столе стоят четыре стакана, три нормально, а четвёртый — вверх дном. За ход разрешается перевернуть любые два стакана. Докажите, что за несколько таких операций нельзя поставить нормально все стаканы.

Упражнение 2: На шести елках сидят шесть чижей, на каждой елке — по чижу. Елки растут в ряд с интервалами в 10 метров. Если какой-то чиж перелетает с одной елки на другую, то какойто другой чиж обязательно перелетает на столько же метров, но в обратном направлении. Могут ли все чижи собраться на одной ёлке? А если чижей и ёлок — семь?

1. На доске записаны числа 0, 0, 0 и 1. За ход разрешается прибавить к любым двум числам единицу. Можно ли за несколько таких ходов сделать все числа равными?
2. На вешалке висят 20 платков. 17 девочек по очереди подходят к вешалке, и каждая либо снимает, либо вешает ровно один платок. Может ли после ухода девочек на вешалке остаться 10 платков?
3. На доске написаны числа 1, 2, ... , 37. Разрешается стереть любые два числа и вместо них написать их разность. Повторив эту операцию 36 раз, мы получим одно число. Докажите, что это число не может быть нулем.
4. На острове Серобуромалин обитают 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Если встречаются два хамелеона разного цвета, то они одновременно меняют свой цвет на третий (серый и бурый становятся оба малиновыми и т.п.). Может ли случиться так, что через некоторое время все хамелеоны будут одного цвета?
5. На доске написано число 9^{2020}. У него вычисляется сумма цифр, у полученного числа вновь вычисляется сумма цифр, и так далее, до тех пор, пока не получится однозначное число. Что это за число?

Инвариант. Часть 2.

6. У племени семпоальтеков было 24 слитка золота, 26 редких жемчужин и 25 стеклянных бус. У Кортеса они могут обменять слиток золота и жемчужину на одни бусы, у Монтесумы — один слиток и одни бусы на одну жемчужину, а у тотонаков - одну жемчужину и одни бусы на один золотой слиток. После долгих обменов у семпоальтеков осталось только одна вещь. Какая?
7. Круг разделен на 6 секторов, в каждом из которых стоит фишка. Разрешается за один ход сдвинуть любые две фишки в соседние с ними сектора. Можно ли с помощью таких операций собрать все фишки в одном секторе?
8. В вершинах шестиугольника записаны числа 12, 1, 10, 6, 8, 3 (в таком порядке). За один ход разрешено выбрать две соседние вершины и к числам, стоящим в данных вершинах, одновременно прибавить единицу или одновременно вычесть из них единицу. Можно ли получить в итоге шесть чисел в таком порядке:

   а) 14, 6, 13, 4, 5, 2; б) 6, 17, 14, 3, 15, 2?
9. В алфавите языка племени УЫУ всего две буквы: У и Ы. Известно, что смысл слова не изменится, если из слова выкинуть стоящие рядом буквы УЫ и при добавлении в любое место слова буквосочетания ЫУ или УУЫЫ. Можно ли утверждать, что слова УЫЫ и ЫУУ имеют одинаковый смысл?
10. На столе лежит куча из 637 ракушек. Из нее убирают одну ракушку и кучу делят на две (не обязательно поровну). Затем из какой-нибудь кучи, содержащей больше одной ракушки, снова убирают одну ракушку и снова кучу делят на две. И так далее. Можно ли через несколько ходов оставить на столе только кучи, состоящие из трех ракушек?

Инвариант. Часть 3.

11. Из стакана молока три ложки содержимого переливают в стакан с чаем и небрежно помешивают. Затем зачёрпывают три ложки полученной смеси и переливают их обратно в стакан с молоком. Чего теперь больше: чая в стакане с молоком или молока в стакане с чаем?

12. Есть три печатающих автомата. Первый по карточке с числами a и b выдает карточку с числами $a+1$ и $b+1$; второй по карточке с четными числами a и b выдает карточку с числами $a/2$ и $b/2$; третий автомат по паре карточек с числами a, b и b, c выдает карточку с числами a, c. Все автоматы возвращают заложенные в них карточки. Можно ли с помощью этих автоматов из карточки (5, 19) получить карточку (1, 2020)?

13. На доске выписаны числа 1, 2, ... , 20. Разрешается стереть любые два числа a и b и заменить их на число ab + a + b. Какое число может остаться на доске после 19 таких операций?

14. На столе лежит в ряд n разноцветных камней. За ход разрешается поменять местами любые два из них. Докажите, что не может оказаться так, что через 2019 ходов камни будут лежать в том же порядке, что и сначала

Инвариант. Часть 3.

11. Из стакана молока три ложки содержимого переливают в стакан с чаем и небрежно помешивают. Затем зачёрпывают три ложки полученной смеси и переливают их обратно в стакан с молоком. Чего теперь больше: чая в стакане с молоком или молока в стакане с чаем?

12. Есть три печатающих автомата. Первый по карточке с числами a и b выдает карточку с числами $a+1$ и $b+1$; второй по карточке с четными числами a и b выдает карточку с числами $a/2$ и $b/2$; третий автомат по паре карточек с числами a, b и b, c выдает карточку с числами a, c. Все автоматы возвращают заложенные в них карточки. Можно ли с помощью этих автоматов из карточки (5, 19) получить карточку (1, 2020)?

13. На доске выписаны числа 1, 2, ... , 20. Разрешается стереть любые два числа a и b и заменить их на число ab + a + b. Какое число может остаться на доске после 19 таких операций?

14. На столе лежит в ряд n разноцветных камней. За ход разрешается поменять местами любые два из них. Докажите, что не может оказаться так, что через 2019 ходов камни будут лежать в том же порядке, что и сначала

Инвариант. Часть 3.

11. Из стакана молока три ложки содержимого переливают в стакан с чаем и небрежно помешивают. Затем зачёрпывают три ложки полученной смеси и переливают их обратно в стакан с молоком. Чего теперь больше: чая в стакане с молоком или молока в стакане с чаем?

12. Есть три печатающих автомата. Первый по карточке с числами a и b выдает карточку с числами $a+1$ и $b+1$; второй по карточке с четными числами a и b выдает карточку с числами $a/2$ и $b/2$; третий автомат по паре карточек с числами a, b и b, c выдает карточку с числами a, c. Все автоматы возвращают заложенные в них карточки. Можно ли с помощью этих автоматов из карточки (5, 19) получить карточку (1, 2020)?

13. На доске выписаны числа 1, 2, ... , 20. Разрешается стереть любые два числа a и b и заменить их на число ab + a + b. Какое число может остаться на доске после 19 таких операций?

14. На столе лежит в ряд n разноцветных камней. За ход разрешается поменять местами любые два из них. Могут ли через 2019 ходов камни будут лежать в том же порядке, что и сначала?

Инвариант. Решение

Упр. 1. Заметим, что за одно парное переворачивание число «правильных» стаканов либо не меняется вообще, ибо уменьшается на 2, либо увеличивается на 2. Значит, чётность этого числа неизменна. Говоря по-умному, чётность числа правильно стоящих стаканов — инвариант. А значит, после любого числа операций она останется неизменной. Поскольку исходно число правильно стоящих стаканов нечётно, то оно будет нечётно всегда и никогда не станет равно четырём

Упр. 2. Заметим, что когда чиж летит вправо, он прибавляет к номеру ёлки, на которой сидит, некоторое число. Тем временем чиж, летящий на то же расстояние налево, вычитает из номера своей ёлки такое же число. Значит, общая сумма номеров ёлок, на которых сидят чижи, — инвариант. В случае шести ёлок эта сумма исходно равна 21, что не кратно 6, а если все чижи собираются на одной ёлке, то полученная сумма должна быть кратна 6. Противоречие. Если чижей и ёлок семь, то сумма равна 28, что кратно 7. Более того, очевидно, что собраться чижи могут только на средней, четвёртой ёлке (нетрудно показать, как это сделать).

1. Заметим, что чётность количества чётных чисел — инвариант (см упражнение 1). Если бы можно было сделать все числа равными, то количество чётных чисел стало бы равно либо 4, либо 0. Оба этих числа чётные, однако исходное количество чётных чисел нечётно. Значит, это невозможно.

2. Заметим, что чётность платков на вешалке всегда совпадает с чётностью числа подошедших девочек. Значит, после 17 девочки на вешалке должно быть нечётное число платков. Значит, не может остаться 10.

3. Заметим, что при этой операции число нечётных чисел либо уменьшается на 2, либо не меняется. Значит, чётность ила нечётных чисел — инвариант. Заметим, что исходно это число равно 19. Значит, оно не может стать равным нулю.

4. Известно, что если число делится на 9, то сумма его цифр также делится на 9. Заметим, что исходное число делится на 9, а значит, каждое следующее число также будет делиться на 9. Эта делимость — инвариант в данной задаче. Значит, ответом будет являться цифра, кратная 9. Таких цифр две: это 0 и 9. Однако по очевидным причинам мы не можем получить в ответе 0, а значит, получим 9.

5. Заметим, что при любом обмене меняется чётность всех трёх «валют». Значит, стеклянные бусы всегда будут иметь чётность, отличную от двух других. Значит, останутся именно стеклянные бусы.

6. Раскрасим секторы в шахматную раскраску. Заметим, что на каждом этапе две какие-то фишки меняют цвет своего сектора. А значит, общее число фишек в белых секторах либо не меняется вообще, либо меняется на 2. Значит, чётность этого числа — инвариант. Исходно в белых секторах суммарно 3 фишки (нечётное число), а значит, оно не может стать равным 6 или 0.

7. Заметим, что чётность общей суммы чисел — инвариант. Исходная сумма чётная, значит, получить нечётную сумму из пункта б невозможно. Набор из пункта а получить можно, достаточно привести пример.

8. Заметим, что чётность общей суммы чисел — инвариант. Исходная сумма чётная, значит, получить нечётную сумму из пункта б невозможно. Набор из пункта а получить можно, достаточно привести пример

9. Заметим, что при любой разрешённой операции разность между числом букв У и числом букв Ы в слове не изменяется. Но в словах УЫЫ и ЫУУ эти разности разные. Значит, из слова УЫЫ нельзя разрешенными операциями получить слово ЫУУ, и, следовательно, нельзя утверждать, что эти слова обязательно имеют одинаковый смысл.

10. После каждой процедуры (изъятия камушка и раздвоения кучки) число ракушек на 1 уменьшается, а число кучек на 1 увеличивается. Значит, сумма числа ракушек и числа кучек — инвариант и постоянно равно 638. Пусть x — число кучек из 3 ракушек, оставшееся в конце. Тогда $638 = 3x + x = 4x$. Но 638 не кратно четырём. Противоречие

11. После второго переливания в стакане с молоком оказывается ровно столько чая, сколько оттуда было взято молока: ведь объём жидкости не изменился. Значит, в итоге чая в молоке столько же, сколько молока в чае.

12. Нетрудно доказать, что после любой операции, начинающейся с карточки (5, 19), разность между числами на карточках будет делиться на 7. Разность на карточке (1, 2020) не кратна семи.

13. Заметим, что $(a + 1)(b + 1) = ab + a + b1$. Рассмотрим величину S, равную произведению всех написанных чисел, увеличенных на 1. Тогда эта величина — инвариант. Значит, после 19 операций она не изменится, и число, написанное на доске, будет равно 21!

14. Нет, не получится.