ПЯТАЯ ВЫСОТА, ВШЭ, ТЛ "ДваждыДва" 09 марта 2020

Листок 17 Бета **Принцип Дирихле. Часть 1.**

Упражнение 1: Незнайке попалась в руки клетчатая доска 6 x 6, и он вырезал из неё 17 клеточек. Потом подошёл Знайка и заметил, что может вырезать из оставшейся части детальку 2 x 1. Докажите, что Знайка не ошибся.

Упражнение 2: Винтику и Шпунтику поручили рассортировать мешок с шарами по цветам. В мешке множество белых, красных и синих шаров. Знайка, задумался, а сколько шариков подряд им нужно вытащить, чтобы гарантированно набралось 5 одинакового цвета

1. В княжеской дружине 15 полков. В них в сумме 6015 ратников. На площади помещается 400 человек. Докажите, что найдётся полк, ратники которого не поместятся на этой площади.
2. В классе учится 27 школьников, знающих (всего) 109 стихотворений. Докажите, что найдётся школьник, знающий не менее пяти стихотворений.
3. У Кнопочки в гардеробе 90 платьев, все они красные или желтые. Известно, что среди любых двух платьев есть хотя бы одно красное. Сколько желтых платьев может быть у Кнопочки?
4. В каждой клетке таблицы размером 3 x 3 стоит либо 0, либо 1, либо 2. Может ли оказаться, что суммы чисел в строках, в столбцах, в двух главных диагоналях – все различны?
5. Знайка выписывает в тетрадь натуральные числа. Какое наибольшее количество натуральных чисел он может написать так, чтобы среди них не нашлось двух чисел, разность которых делится на 10?
6. 35 кроликов рассадили по 9 клеткам. Какие из утверждений всегда верны:
   1) «найдется клетка, в которой 4 кролика»;
   2) «найдется клетка, в которой не менее 4кроликов»;
   3) «найдется клетка, в которой больше 4 кроликов;
   4) «найдется клетка, в которой 3 кролика»;
   5) «найдется клетка, в которой меньше 4 кроликов»;
   6) «найдется клетка, в которой не более 3 кроликов»;
   7) «найдется клетка, в которой больше 3 кроликов»;
   8) «найдется клетка, в которой меньше 3 кроликов».
   Найдите среди этих 8 утверждений две пары одинаковых.

Принцип Дирихле. Часть 2.

7. В классе 15 учеников. Докажите, что найдутся как минимум, 2 ученика, отмечающих дни рождения в одном месяце.
8. Пять мальчиков собрали вместе 14 грибов, каждый нашёл хотя бы один гриб. Докажите, что хотя бы два мальчика нашли одинаковое число грибов.
9. В ковре размером 3 x 3 м Незнайка проделал 8 дырок (дырки считаем точечными). Докажите, что из него можно вырезать коврик размером 1 x 1 м, не содержащий внутри себя дырок.
10. В лесу растёт миллион ёлок, разного размера. Известно, что на каждой из них не более 600 000 иголок. Докажите, что в лесу найдутся две елки с одинаковым количеством иголок.
11. Какое наибольшее число клеток доски 2020 x 2020 можно покрасить, чтобы никакие две покрашенные клетки не соприкасались (даже в одной точке)? Ответ обосновать.

Принцип Дирихле. Часть 3.

12. На собеседование пришли 65 школьников. Им предложили 3 контрольные работы. За каждую контрольную ставилась одна из оценок: 2, 3, 4 или 5. Верно ли, что найдутся два школьника, получившие одинаковые оценки на всех контрольных?
13. В классе 25 учащихся. Из них 20 занимаются английским языком, 17 увлекаются плаванием, 14 посещают математический кружок. Докажите, что в классе найдётся хотя бы один ученик, который занимается английским языком, увлекается плаванием и посещает математический кружок.
14. На окне размером 40см x 30см село 25 мух. Докажите, что квадратной мухобойкой 11 см x 11 см можно прихлопнуть сразу трёх мух.
15. Докажите, что из 82 кубиков, каждый из которых окрашен в определенный цвет, можно выбрать либо 10 одноцветных кубиков, либо 10 кубиков, окрашенных в 10 разных цветов.

Принцип Дирихле. Часть 3.

12. На собеседование пришли 65 школьников. Им предложили 3 контрольные работы. За каждую контрольную ставилась одна из оценок: 2, 3, 4 или 5. Верно ли, что найдутся два школьника, получившие одинаковые оценки на всех контрольных?
13. В классе 25 учащихся. Из них 20 занимаются английским языком, 17 увлекаются плаванием, 14 посещают математический кружок. Докажите, что в классе найдётся хотя бы один ученик, который занимается английским языком, увлекается плаванием и посещает математический кружок.
14. На окне размером 40см x 30см село 25 мух. Докажите, что квадратной мухобойкой 11 см x 11 см можно прихлопнуть сразу трёх мух.
15. Докажите, что из 82 кубиков, каждый из которых окрашен в определенный цвет, можно выбрать либо 10 одноцветных кубиков, либо 10 кубиков, окрашенных в 10 разных цветов.

Принцип Дирихле. Часть 3.

12. На собеседование пришли 65 школьников. Им предложили 3 контрольные работы. За каждую контрольную ставилась одна из оценок: 2, 3, 4 или 5. Верно ли, что найдутся два школьника, получившие одинаковые оценки на всех контрольных?
13. В классе 25 учащихся. Из них 20 занимаются английским языком, 17 увлекаются плаванием, 14 посещают математический кружок. Докажите, что в классе найдётся хотя бы один ученик, который занимается английским языком, увлекается плаванием и посещает математический кружок.
14. На окне размером 40см x 30см село 25 мух. Докажите, что квадратной мухобойкой 11 см x 11 см можно прихлопнуть сразу трёх мух.
15. Докажите, что из 82 кубиков, каждый из которых окрашен в определенный цвет, можно выбрать либо 10 одноцветных кубиков, либо 10 кубиков, окрашенных в 10 разных цветов.

Принцип Дирихле. Решение

Упр. 1. Назовём детальку 2 x 1 доминошкой, а теперь давайте разобьем нашу доску на 18 доминошек. Тогда 17 вырезанных клеток могут «испортить» максимум 17 доминошек. А одна доминошка останется нетронутой (по признаку Дирихле), её - то Знайка и вырежет. (вырезанные клетки - кролики, доминошки - клетки. Давайте проведём доказательство, не ссылаясь на известный принцип Дирихле. Допустим, Знайка ошибся. Тогда не осталось ни одной не испорченной доминошки. Доминошек всего 18, чтобы их все испортить мы должны из каждой вырезать хотя бы одну клетку, а это значит, что мы вырежем хотя бы 18 клеток. Но Незнайка вырезал ровно 17. Пришли к противоречию. Таким образом, одна доминошка останется целой.

Упр. 2. Что здесь у нас в роли клеток и в роли кроликов? Здесь клетки - это цвета, а шары - кролики. Заводим красную, синюю и белую клетки. Достаём белый шар - опускаем в белую клетку, синий в синюю, красный в красную. К тому моменту, когда в каждой клетке окажется по 4 шара - мы вытащим ровно 12 шаров. Достаём 13-й, он попадает в одну из трёх клеток, а так как во всех уже по 4 штуки, то в одной из трёх теперь окажется 5 штук. То, что нам нужно.

1. Предположим, что в каждом полку не более 400 ратников. Значит, в 15 полках не более 15 x 400=6000 ратников. Но по условию в дружине 6015 человек. Значит, найдётся полк, в котором больше 400 ратников. Поэтому ратники этого полка не поместятся на площади 400 мест.

2. Предположим, что каждый школьник знает не более четырёх стихотворений. Значит, 27 школьников знают не более 4 x 27=108 стихотворений. Но по условию они знают 109 стихотворений. Получили противоречие. Значит, найдётся школьник, который знает хотя бы 5 стихотворений.

3. заметим, что у Кнопочки не может быть более 2-х желтых платьев. Иначе мы берём эти два платья и среди них нет хотя бы одного красного. Значит у неё может быть либо одно красное платье, либо ни одного.

4. Нет. Так как количество сумм: по строкам-три, по столбцам – три и по диагоналям –две. То есть должно быть 8 различных сумм. Но различные комбинации чисел 0,1,2 дают всего 7 различных сумм. Следовательно, по принципу Дирихле среди 8 сумм будут хотя бы две одинаковые.

5. заметим, что разность двух чисел делится на 10, если оба числа оканчиваются на одинаковую цифру. Например, 3587-357=3230 - делится на 10.

   Как к этой задаче применить принцип Дирихле? Заведём 10 ящиков: 0, 1, 2, . . . , 9. И будем числа распределять по ящикам так, чтоб последняя цифра числа совпадала с номером ящика. Как долго мы можем заполнять ящики, так чтоб в каждом оказалось только одно число? Правильно, 10 раз. А вот если мы берём 11-е число, то тогда в каком-то ящике будет два числа и разность этих двух чисел будет делиться на 10.

6. 1) это не всегда так. Например, все кролики сели в одну клетку. И тогда есть клетка, в которой «хотя бы 4» кролика, но нет клетки, в которой ровно 4 кролика.

   2) это верное утверждение. Докажем от противного. Пусть это не так, значит в каждой клетке сидит не более 3 кроликов, а значит во всех 9 клетках сидит не более 27 кроликов. Но по условию, кроликов было 35, значит получаем противоречие.

   3) это неверное утверждение. Так как может быть такая рассадка: в восьми клетках по 4 кролика, а в одной клетке 3 кролика.

   4) это утверждение неверное, так же, как и первое.

   5) Это верное утверждение. Докажем от противного, пусть такой клетки нет. А это значит, что в каждой не менее 4 кроликов, следовательно, в 9-ти клетках не менее 36 кроликов. А по условию кроликов 35 - противоречие. Значит найдётся хотя бы одна клетка, в которой менее 4-х кроликов.

   6) Верно, этот пункт равносилен 5-му.

7) Этот пункт верен. Если бы это было не так, то в каждой клетке было бы <=3 кроликов, и тогда всего было бы <=27 кроликов.

8) Неверно. Пример: 4 4 4 4 4 4 4 4 3.

Пары: 2) и 7), так как =>4 равносильно >3.

5) и 6), так как <4 равносильно <=3.

7. Пусть 15 учеников будут «кролики». Тогда «клетками» будут месяцы года, их 12. Так как 15>12, то по принципу Дирихле найдётся, как минимум, одна клетка, в которой будут сидеть по крайней мере 2 «кролика». То есть найдётся месяц, в котором будут отмечать день рождения не менее 2 учеников класса.

8. Докажем от противного. Если это не так, то каждый собрал разное количество грибов. 1, 2, 3, 4, 5 в сумме получается 15 грибов, что противоречит условию. Следовательно, кто-то один, кроме первого, нашёл на один гриб меньше. Значит, хотя бы два мальчика собрали одинаковое количество грибов.

9. Здесь дырки будут «кроликами». Разрежем ковёр на 9 ковриков размером 1 х 1 м. Так как ковриков - «клеток» 9, а дырок - «кроликов» 8, то найдётся хотя бы одна «клетка», в которой не будет «кроликов», то есть найдётся коврик без дырок внутри.

10. Заведём 600 001 «клеток» с номерами: 0, 1, 2, ... ,600 000. В каждую клетку будем садить ёлку, если количество иголок на ней совпадает с номером клетки (если на елке 100 иголок - садим ее в клетку с номером 100). Здесь елки выполняют роль кроликов. «Клеток» меньше чем «кроликов», 600 001<1 000 000. Значит, по принципу Дирихле в какой-то «клетке» будет находиться не менее двух «кроликов». А если в одну «клетку» попали две елки, значит на них одинаковое количество иголок.

11. Разобьем доску на квадратики размером 2 х 2 таких квадратиков получится 1 020 100. Заметим, что в каждом таком квадратике не может быть более одной закрашенной клетки. Таким образом, наибольшее число клеток равно 1 020 100.

12. Рассмотрим множество наборов из трёх оценок за соответствующие контрольные. Количество таких наборов равно 4 х 4 х 4=64. Поскольку число учащихся больше 64, по принципу Дирихле каким-то двум учащимся соответствует один набор оценок.

13. Занимаются английским и увлекаются плаванием не меньше 20+17-25=12 человек, кроме них, в классе не больше 25-12=13 человек, а посещают математический кружок 14, значит, в классе найдётся хотя бы один ученик, который занимается английским языком, увлекается плаванием и посещает математический кружок.

14. Разделим окно на 12 квадратов размером 10см х 10см. Если в каждом квадрате не более двух мух, то всего на окне не более 2 х 12=24 мух, а по условию мух 25, значит, в каком-то квадрате сидит хотя бы 3 мухи. Мухобойка закроет этот квадрат. Значит, такой мухобойкой можно прихлопнуть сразу трёх мух.

15. Пусть кубики окрашены не более чем в 9 цветов, иначе мы могли бы выбрать 10 кубиков разного цвета. Пусть при этом кубиков каждого цвета не более 9. Тогда всего кубиков не более 81, что противоречит условию. Значит можно выбрать либо 10 одноцветных кубиков, либо 10 кубиков, окрашенных в 10 разных цветов.