ПЯТАЯ ВЫСОТА, ВШЭ, ТЛ "ДваждыДва" 09 марта 2020

Листок 17 Альфа **От противного. Часть 1.**

Упражнение 1: Докажите, что в любой компании из 10 человек найдутся двое с одинаковым числом знакомых в этой компании.

Упражнение 2: Восемь кроликов посадили в семь клеток. Докажите, что есть клетка, в которой оказалось по крайней мере два кролика.

1. Имеется 101 пуговица, каждая пуговица — одного из 11 цветов. Докажите, что либо среди этих пуговиц найдутся 11 пуговиц одного цвета, либо 11 пуговиц разных цветов
2. В поход пошли 25 туристов. Самому старшему из них 40 лет, а самому младшему — 17 лет. Верно ли, что среди туристов есть ровесники?
3. Можно ли разложить 44 шарика на 9 кучек так, чтобы количество шариков в разных кучках было различным?
4. Среди любых десяти из шестидесяти ребят найдутся трое одноклассников. Докажите, что среди всех них найдутся 15 одноклассников.
5. Известно, что ляпусики, у которых есть мюмзики, не все бармаглоты. Кроме того, у тех ляпусиков, которые умеют хрюкотать и при этом не бармаглоты, мюмзиков нет. Докажите, что не все ляпусики, у которых есть мюмзики, умеют хрюкотать.

От противного. Часть 2.

6. В ковре размером 4x4 метра моль проела 15 дырок. Докажите, что из него можно вырезать коврик размером 1x1 метр, не содержащий внутри себя дырок.
7. На шахматной доске 8x8 расставлены 17 королей. Докажите, что два из них бьют друг друга.
8. Имеется 25 конфет 3 сортов. Верно ли, что не менее 9 из них будут какого-то одного сорта?
9. 10 друзей послали друг другу праздничные открытки, так что каждый послал пять открыток. Докажите, что найдутся двое, которые послали открытки друг другу.
10. Из набора домино выбросили все кости с шестёрками. Можно ли оставшиеся кости выложить в ряд?

От противного. Часть 3.

11. Каждая клетка таблицы 2013x2013 покрашена в один из 2012 цветов. За ход можно взять строку или столбец и, если там есть две клетки одного цвета, перекрасить эту строку или столбец в этот цвет. Можно ли за несколько ходов покрасить всю таблицу в один цвет?
12. За круглым столом сидят 25 мальчиков и 25 девочек. Докажите, что у кого-то из сидящих за столом оба соседа – мальчики.
13. Юра, Лёша и Миша коллекционируют марки. Количество Юриных марок, которых нет у Лёши, меньше, чем количество марок, которые есть и у Юры, и у Лёши. Точно так же, число Лёшиных марок, которых нет у Миши, меньше, чем число марок, которые есть и у Лёши и у Миши. А число Мишиных марок, которых нет у Юры, меньше, чем число марок, которые есть и у Юры и у Миши. Докажите, что какая-то марка есть у каждого из трех мальчиков.
14. Можно ли 100 гирь массами 1, 2, 3, ..., 99, 100 разложить на 10 кучек разной массы так, чтобы выполнялось условие: чем тяжелее кучка, тем меньше в ней гирь?
15. Докажите, что найдется число вида $111\ldots11000..00$, делящееся на 2013.

От противного. Часть 3.

11. Каждая клетка таблицы 2013x2013 покрашена в один из 2012 цветов. За ход можно взять строку или столбец и, если там есть две клетки одного цвета, перекрасить эту строку или столбец в этот цвет. Можно ли за несколько ходов покрасить всю таблицу в один цвет?
12. За круглым столом сидят 25 мальчиков и 25 девочек. Докажите, что у кого-то из сидящих за столом оба соседа – мальчики.
13. Юра, Лёша и Миша коллекционируют марки. Количество Юриных марок, которых нет у Лёши, меньше, чем количество марок, которые есть и у Юры, и у Лёши. Точно так же, число Лёшиных марок, которых нет у Миши, меньше, чем число марок, которые есть и у Лёши и у Миши. А число Мишиных марок, которых нет у Юры, меньше, чем число марок, которые есть и у Юры и у Миши. Докажите, что какая-то марка есть у каждого из трех мальчиков.
14. Можно ли 100 гирь массами 1, 2, 3, ..., 99, 100 разложить на 10 кучек разной массы так, чтобы выполнялось условие: чем тяжелее кучка, тем меньше в ней гирь?
15. Докажите, что найдется число вида $111\ldots11000..00$, делящееся на 2013.

От противного. Часть 3.

11. Каждая клетка таблицы 2013x2013 покрашена в один из 2012 цветов. За ход можно взять строку или столбец и, если там есть две клетки одного цвета, перекрасить эту строку или столбец в этот цвет. Можно ли за несколько ходов покрасить всю таблицу в один цвет?
12. За круглым столом сидят 25 мальчиков и 25 девочек. Докажите, что у кого-то из сидящих за столом оба соседа – мальчики.
13. Юра, Лёша и Миша коллекционируют марки. Количество Юриных марок, которых нет у Лёши, меньше, чем количество марок, которые есть и у Юры, и у Лёши. Точно так же, число Лёшиных марок, которых нет у Миши, меньше, чем число марок, которые есть и у Лёши и у Миши. А число Мишиных марок, которых нет у Юры, меньше, чем число марок, которые есть и у Юры и у Миши. Докажите, что какая-то марка есть у каждого из трех мальчиков.
14. Можно ли 100 гирь массами 1, 2, 3, ..., 99, 100 разложить на 10 кучек разной массы так, чтобы выполнялось условие: чем тяжелее кучка, тем меньше в ней гирь?
15. Докажите, что найдется число вида $111\ldots11000..00$, делящееся на 2013.

От противного. Решение

Упр. 1. Пусть не так. Отрицание к условию: у каждого человека своё число знакомых, отличное от других. Минимальное количество дружб 0, а максимальное 9. Тогда единственный случай это: 0, 1, 2, … , 8, 9. Но если какой-то человек дружит со всеми (9), не найдется человека, который не дружит ни с кем (0). Противоречие

Упр. 2. Доказательство от противного!! Если бы ни в какой клетке не было двух кроликов, то всего их было бы не больше, чем клеток, то есть, максимум 7. Но кроликов 8, противоречие.

1. Пусть не так. Тогда нет 11 пуговиц одного цвета и нет 11 пуговиц разных цветов. Тогда пуговиц каждого цвета – не более 10, а также цветов не больше 10. Значит пуговиц не более 10*10=100. Противоречие.

2. Пусть ровесников нет. Тогда рассмотрим все возможные возрасты туристов: 17, 18, 19, .. , 40. Всего 24 варианта. А должно быть 25. Противоречие.

3. Пусть можно. Значит у нас получилось 9 кучек с различным количеством шариков. Посмотрим на минимальную сумму шариков в таких кучках. 1+2+ … +9=45. Что больше чем 44. Противоречие.

4. Пусть не так. Тогда из 60 человек, в одном классе максимум 14. Тогда классов минимум 5. Возьмем по два человека из различных пяти. Среди них нет троих одноклассников, хотя их 10. Противоречие.

5. Пусть не так, и все ляпусики, у которых есть мюмзики, умеют хрюкотать. Среди ляпусиков, у которых есть мюмзики, есть не бармаглоты. Эти ляпусики умеют хрюкотать по предположению. Но тогда это ляпусики, умеющие хрюкотать и при этом не бармаглоты, и у них есть мюмзики. Противоречие со вторым условием. Подсказка: можно обозначить непонятные слова понятными :)

6. «Клетки» – это дырки (15), «кролики» – кв. метры (16). По принципу Дирихле, найдётся «клетка», в которой не менее 2 «кроликов». Значит есть 2 части 1x1 метр, на которых только одна дырка. Значит одна из частей 1x1 пустует.

7. Король, занимающий любую клетку квадрата 2x2 бьёт все стоящие в квадрате фигуры. Тогда, если «клетки» – это квадраты 2x2 (15), а «кролики» – короли (16), по принципу Дирихле, найдётся «клетка», в которой не менее 2 «кроликов».

8. Пусть конфет каждого сорта не более 9, то есть не превышает восьми. Тогда всего конфет не больше 3 x 8 = 24, а по условию их 25. Противоречие.

9. Пусть такой пары друзей не нашлось. Тогда каждый друг отправил открытку 5 людям и не получил в ответ ни от одного из них. Значит один человек мог получить открытку максимум от (10-1-5)=4 человек. Значит суммарно друзья получили не больше 4*10=40 открыток. Но получили они столько же, сколько отправили. А отправили 10*5=50. Противоречие.

10. Теперь каждое число (от 0 до 5) встречается в доминошках 7 раз (двойные доминошки 1:1, 2:2 и т. д. считаются дважды). По краям стоят два числа, значит есть хотя бы 4 числа, которые не стоят по краям. Пусть нам удалось выложить все кости в ряд. Тогда все числа, не стоящие по краям, стоят на переходах от одной доминошки к другой. Значит их четное количество. Но их 7. Противоречие.

11. В каждой строке есть две клетки одного цвета (принцип Дирихле). Раскрасим каждую строку в этот цвет. У нас получилось 2013 строк различных цветов. По принципу Дирихле, среди строк обязательно есть две, покрашенные в один цвет. Значит, в каждом столбце встречаются две клетки этого цвета. Следовательно, мы можем перекрасить каждый столбец в этот цвет.

12. Пусть не так. Тогда нигде рядом не сидят больше двух мальчиков и рядом с девочкой всегда сидит хотя бы одна девочка. Разобьем всех сидящих за столом на группы рядом сидящих мальчиков и группы рядом сидящих девочек. Эти группы чередуются, поэтому количество групп мальчиков и групп девочек одинаково. Как мы только что заметили, в каждой группе мальчиков находится не более двух ребят, а в каждой группе девочек – не менее двух. Поэтому все эти группы состоят ровно из двух человек (иначе мальчиков меньше, чем девочек). Но тогда этих групп 25 – нечётное число. Противоречие.

13. (проще через круги Эйлера) Пусть таких марок нет. Тогда марки, которые есть у Юры, но не у Лёши + те, что есть у Лёши, но не у Миши + те, что есть у Миши, но не у Юры – это все марки, что есть у мальчиков. Тогда марки, которые есть и у Юры, и у Лёши, марки, которые есть у Лёши и у Миши, и марки, которые есть у Миши и у Юры это различные марки, которые являются подмножеством всех марок. Но по условию их больше, чем всех марок. Противоречие.

14. Предположим, что можно разложить гирьки в соответствии с условием задачи. Сумма масс всех гирек равна 5050. Значит, масса самой тяжёлой кучки не меньше $5050 : 10 = 505$. Так как в наборе нет гирек массы больше 100, то в этой кучке не меньше 6 гирек. Значит, общее количество гирек не меньше чем $6 + 7 + 8 + ... + 15 = 105 > 100$. Противоречие.

15. Рассмотрим последовательность чисел 1, 11, 111, ... Допустим, что ни одно из них не делится на 2013. Поскольку остатки от деления этих чисел на 2013 могут равняться числам от 0 до 2012, то найдутся среди последовательности два числа, дающие при делении на 2013 одинаковые остатки. Тогда их разность делится на 2013, она также имеет нужный нам вид.