Функциональный анализ. Листок 2. Обобщенные функции.

Срок сдачи – 14 апреля.

1. Пусть $z = x + iy \equiv re^{i\phi}$, где $r > 0$ (при $z \neq 0$) и $-\pi < \phi \leq \pi$. Обозначим $\phi = \arg z$. Определим $\ln z$ как $\ln z = \ln|z| + i\arg z$. Верно ли, что $\ln z^2 = 2\ln z$ и $\ln|z|^2 = \ln z + \ln\overline{z}$.

2. Определим обобщенные функции $\ln(x+i0)$ и $\ln(x-i0)$ из $\mathcal{S}'(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(R)$ как пределы локально интегрируемых функций $\ln(x \pm i\varepsilon)$ переменной x при $\varepsilon \to 0$. Покажите, что

а) $\ln(x+i0) + \ln(x-i0) = 2\ln|x|$, б) $\ln(x+i0) - \ln(x-i0) = 2\pi i\theta(-x)$.

в) $\big(\ln(x \pm i0)\big)' = \dfrac{1}{x \pm i0}$,

3. Найдите аналитические представления обобщенных функций на прямой (т.е., представьте обобщенные функции в виде разности предельных значений функции, аналитической в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ и функции, аналитической в нижней полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$):

а) $\delta(x)$; б) $(x \pm i0)^{-1}$; в) $1/x$;

г) $\ln|x|$; д) $\theta(x)$.

4. Найти Фурье-образы обобщенных функций

а) $\dfrac{e^{ipx}}{x^2+a^2}$; б) $\dfrac{\sin ax}{x}$; в) $\theta(x)$;

г) $\delta(x-a)$; д) $(x \pm i0)^{-1}$; е) $\dfrac{1}{x}$; ж) $\ln(x \pm i0)$.

5. а) Найдите фундаментальное решение оператора теплопроводности $\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ (т.е., решение уравнения $u'_t - u''_{xx} = \delta(t)\delta(x)$, равное нулю при $t < 0$. *Указание*: примените преобразование Фурье по x.

б) Найдите функцию Грина задачи Коши $u'_t - u''_{xx} = f(x,t)$ при $t > 0$; $u(x,0) = 0$.

6. Пусть $a(t)$ – непрерывная функция.

а) Покажите, что задача Коши $u' + a(t)u = f(t)$, $u(0) = u_0$, где $u(t) \in C^1([0,+\infty)$ эквивалентна задаче нахождения обобщенной функции $u(t)$ с носителем на полупрямой $[0,+\infty)$, удовлетворяющей уравнению

$$u' + a(t)u = f(t)\theta(t) + u_0\delta(t);$$

б) Переформулируйте аналогичным образом задачу Коши для линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка.

в) Используйте результаты задач 2б) и 3а) для нахождения распределения температуры $u(x,T)$ в момент времени T, считая, что в момент времени $t = 0$ она распределена по закону $u(x,0) = e^{ax^2}$, и меняется со временем согласно уравнению теплопроводсти $u'_t - u''_{xx} = 0$.

7. Найдите пределы $\lim_{\lambda\to\pm\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{x}$ в смысле обобщенных функций $\mathcal{S}'$, где $\frac{e^{i\lambda x}}{x}$ понимается в смысле главного значения.

8. Найти преобразование Фурье функции $\dfrac{1}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$.

9. Показать, что

$$\mathcal{E}(x,t) = \frac{\theta(at-|x|)}{2\pi a\sqrt{a^2t^2-|x|^2}},\ a > 0, |x| = \sqrt{x^2+y^2}$$

– фундаментальное решение дифференциального оператора $\partial_t^2 - a^2(\partial_x^2 + \partial_y^2)$.

10. Найти запаздывающую и опережающую функции Грина свободного уравнения Шредингера $\mathrm{i}\partial_t\phi = -\frac{1}{2}\Delta\phi$.