Задача 2,5.3. Проверьте, что

а) $$\delta_{\bar z} : \mathcal{F}^{(p,q)}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{F}^{(p-1,q)}(\mathcal{U})$$

$$\delta_z : \mathcal{F}^{(p,q)}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{F}^{(p,q-1)}(\mathcal{U})$$

б) $$\delta_{\bar z}^2 = \delta_z^2 = 0 , \quad \delta_{\bar z}\delta_z + \delta_z \delta_{\bar z} = 0$$

• Оператор Лапласа, Операторы G и H.

Если Δ - это оператор Лапласа, ассоциированный с квадратичной формой $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2$, то, как легко проверить,

$$\Delta f = -4 \sum_{i=1}^{n} \partial_{z_i} \partial_{\bar z_i} f$$

Таким образом, на форме вида $f\,\Omega_I \wedge \overline{\Omega}_J$ оператор Лапласа Δ действует по формуле

$$\Delta\left(f\,\Omega_I \wedge \overline{\Omega}_J\right) = \Delta(f)\,\Omega_I \wedge \overline{\Omega}_J$$

Задача 2,5.4. Доказать, что

$$\Delta = 2\left(d_z \delta_z + \delta_z d_z\right) = 2\left(d_{\bar z}\delta_{\bar z} + \delta_{\bar z} d_{\bar z}\right)$$

Следовательно, оператор Лапласа сохраняет пространство $\mathcal{F}^{(p,q)}(\mathcal{U})$.

Оказывается, что и операторы G и H уважают биградуировку:

$$G : \mathcal{F}^{(p,q)} \longrightarrow \mathcal{F}^{(p,q)}$$

$$H : \mathcal{F}^{(p,q)} \longrightarrow \mathcal{F}^{(p,q)}$$

Давайте поймем, почему это так.