Задача 2,5.1. Докажите, что а) $d_z f = \sum \frac{\partial f}{\partial z_i} d\omega_i$, $d_{\bar z} f = \sum \frac{\partial f}{\partial \bar z_i} \bar\omega_i$

б) $\frac{\partial}{\partial z_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} - i\frac{\partial}{\partial y_i}$, $\frac{\partial}{\partial \bar z_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} + i\frac{\partial}{\partial y_i}$

Пусть $\varphi \in \mathcal{F}^{(p,q)}(\mathcal{U})$. Заменив в разложении $\varphi = \sum \varphi_{IJ}\, \Omega_I \wedge \bar\Omega_J$ каждую функцию φ_{IJ} её дифференциалом $d_z \varphi_{IJ}$, получим $(p+1,q)$-форму $d_z\varphi$. Аналогично определяется оператор

$$d_{\bar z} : \mathcal{F}^{(p,q)}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{F}^{(p,q+1)}(\mathcal{U})$$

Если операторы d_z, $d_{\bar z}$ продолжить по линейности, то на $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ оператор $d = d_z + d_{\bar z}$

Задача 2,5.2 Доказать, что $d_z^2 = d_{\bar z}^2 = 0$, $d_z d_{\bar z} + d_{\bar z} d_z = 0$

- <u>Операторы δ_z и $\delta_{\bar z}$.</u>

Положим $\Omega_I = \omega_{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{i_p}$, $\Omega_I^a = \omega_{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{i_{a-1}} \wedge \omega_{i_{a+1}} \wedge \ldots \wedge \omega_{i_p}$, $1 \le a \le p$. Аналогичный смысл у обозначений $\bar\Omega_J$ и $\bar\Omega_J^b$.

Оператор δ_z (соотв. $\delta_{\bar z}$) определим на формах $\varphi = f\,\Omega_I \wedge \bar\Omega_J$ по формуле

$$\delta_z \varphi = 2\sum (-1)^a (\partial_{\bar z_{i_a}} f)\, \Omega_I^a \wedge \bar\Omega_J$$

$$\left(\text{соотв. } \delta_{\bar z}\varphi = 2\sum(-1)^{p+b} (\partial_{z_{i_b}} f)\, \Omega_I \wedge \bar\Omega_J^b\right)$$

А затем продолжим по линейности на пространство $\mathcal{F}(\mathcal{U})$, пользуясь единственностью разложения (1).