# Структуры алгебры Хопфа

**Срок сдачи листка: 10 мая 2020**

**1.** Докажите корректность определения структур алгебры Хопфа для групповой алгебры $\mathbb{K}[G]$ конечной группы $G$ и алгебры $\mathrm{Fun}_{\mathbb{K}}(G)$ линейных функций на этой групповой алгебре. Докажите также, что эти алгебры Хопфа дуальны друг другу относительно билинейной формы

$$\langle f, v\rangle = f(v), \quad f \in \mathrm{Fun}_{\mathbb{K}}(G),\ v \in \mathbb{K}[G].$$

А именно, проверьте явным вычислением следующее:

а) Отображения $\Delta_G$, $\varepsilon_G$ и $\Delta_F$, $\varepsilon_F$ являются гомоморфизмами, а отображения $S_G$ и $S_F$ — антигомоморфизмами.

б) Для всех операций в алгебрах Хопфа $\mathbb{K}[G]$ и $\mathrm{Fun}_{\mathbb{K}}(G)$ выполнены аксиомы определения алгебры Хопфа.

в) Операции в алгебре Хопфа $\mathbb{K}[G]$ связаны с операциями в алгебре Хопфа $\mathrm{Fun}_{\mathbb{K}}(G)$ посредством билинейной формы в соответствии с Определением 2.3.

Все необходимые определения даны в конспекте лекций в формулировках Утверждений 3.2, 3.3 и 3.4.

**2.** Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра Хопфа над полем $\mathbb{K}$ с умножением $m$, единичным элементом $e_{\mathcal{A}}$ и коалгебраическми операциями $\Delta$, $\varepsilon$ и $S$. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}^*$ — дуальную алгебру Хопфа относительно невырожденной билинейной формы $\langle\,,\rangle : \mathcal{A}^* \otimes \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ (см. Определение 2.3 в записках лекций). Пользуясь определением дуальных структур $m^*$, $\Delta^*$ и $\varepsilon^*$, докажите следующее:

а) Отображение $\Delta^*$ действительно гомоморфизм алгебр $\mathcal{A}^*$ и $\mathcal{A}^* \otimes \mathcal{A}^*$ с умножением $m^*$.

б) Операции $m^*$, $\eta^*$, $\Delta^*$ и $\varepsilon^*$ действительно удовлетворяют соотношению:

$$m^* \circ (\mathrm{id} \otimes S^*) \circ \Delta^* = \eta^* \circ \varepsilon^*$$

**3.** Проверьте явным вычислением выполнение соотношений

$$P_{12} \circ (S \otimes S) \circ \Delta = \Delta \circ S \quad \text{и} \quad \varepsilon \circ S = \varepsilon$$

для трех примеров алгебр Хопфа, рассмотренных в записках лекций: для универсальной обертывающей алгебры $\mathcal{U}(\mathcal{L})$ алгебры Ли $\mathcal{L}$, для групповой алгебры $\mathbb{K}[G]$ конечной группы $G$ и для алгебры $\mathrm{Fun}_{\mathbb{K}}(G)$ линейных функций на групповой алгебре группы $G$.

**4.** Пусть $\hat{T} : \mathcal{A} \to \mathrm{End}(V)$ представление алгебры Хопфа $\mathcal{A}$ в конечномерном линейном пространстве $V$. Пусть в некотором базисе $\{e_i\}$ пространства $V$ оператор $\hat{T}(a)$ $a \in \mathcal{A}$ задается матрицей $T = \|T_{ij}(a)\|$. Найдите матрицу оператора, представляющего этот же элемент $a$ в алгебре $\mathrm{End}(V^*)$ дуального пространства $V^*$ в базисе $\{\epsilon_i\}$, двойственном базису $\{e_i\}$: $\langle \epsilon_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$.

**5.** Пусть $\hat{T} : G \to \mathrm{End}(V)$ представление конечной группы $G$ в конечномерном линейном $\mathbb{K}$-пространстве $V$. Пользуясь структурой алгебры Хопфа на групповій алгебре $\mathbb{K}[G]$, постройте представление $G$ в линейном пространстве $\mathrm{End}(V) \simeq V \otimes V^*$.

**6.** Докажите Утверждение 3.5 из записок лекций об алгебрах Хопфа и найдите явный вид операции коумножения на базисных линейных функциях $L_i^j$ (обозначение из записок лекций).