Лекция 3

Доказательство Теоремы. Часть II

- Сохраняются обозначения, принятые в двух предыдущих лекциях. Изучая это доказательство, полезно иметь перед глазами картину „Накрытие" из первой лекции.

- Приступим к постепенному построению тэта-функции на V с дивизором $\pi^*(D)$. Для начала рассмотрим подъемы $\widetilde{F}_i^{\ell}$ формы φ_i на компоненту U_i^{ℓ} прообраза карты T_i.

Итак, $\widetilde{F}_i^{\ell}(z) = \varphi_i(\pi(z))$, $z \in U_i^{\ell}$.

- Напомним, что $d\varphi_i = d_{\bar{z}}\varphi_i = \alpha\Big|_{T_i}$, где $\alpha = \sum_{j,k} a_{jk}\, \omega_j \wedge \bar{\omega}_k$

Ясно, что $\alpha^* = \pi^*\alpha = \sum a_{jk}\, dz_j \wedge d\bar{z}_k$ - это $(1,1)$ форма на V.

Рассмотрим $(1,0)$-форму (на U_i^{ℓ}) $F_i^{\ell}(z) = \widetilde{F}_i^{\ell} + \sum_{j,k} a_{jk}(\bar{z}-\bar{\ell})_k\, dz_j$

Задача 3.1. Докажите, что

$$d_{\bar{z}}\, F_i^{\ell} = 0 \quad \text{на} \quad U_i^{\ell}$$

(Указание: нужно воспользоваться тем, что

$$d_{\bar{z}}\left(\sum a_{jk}(z-\ell)_k\, dz_j\right) = -\alpha^*\ )$$

- Тогда (голоморфный) вариант теоремы Пуанкаре для односвязной области U_i^{ℓ} в $\mathbb{C}^n$ (напомним, что U_i^{ℓ} - это открытый шар) гарантирует существование такой голоморфной функции $h_i^{\ell} \in \mathcal{O}(U_i^{\ell})$, что

$$d h_i^l = d_z h_i^l = F_i^l$$

- <u>Локальные тэты и их аналитическое продолжение.</u>

Пусть дивизор D имеет представление $\{T_i, f_i\}$. На карте U_i^l в $\mathbb{C}^n$ ~~рассмотрим~~ определим функцию

$$\Theta_i^l(z) = f_i(\pi(z))\, e\left(-h_i^l(z)\right)$$

- Для дальнейшего очень важно, что так (локально) определенные функции довольно просто связаны на пересечениях. А именно

Задача 3.2. Если $z \in U_i^l \cap U_j^m$, $l, m \in L$, то

$$\Theta_i^l(z) = \Theta_j^m(z)\, e\left(\sum_{p,q} a_{pq} z_p (\bar{l} - \bar{m})_q + \text{const}\right) \qquad (**)$$

(Указание: применить к правой и левой части (**) оператор $d \log$, а затем воспользоваться определениями g_{ij}, h_i^l, Θ_i^l и свести все к равенству

$$d g_{ij}(\pi(z)) - F_i^l(z) + F_j^m(z) - \sum a_{pq} (\bar{l} - \bar{m})_q\, dz_p = 0,$$

которое прямо следует из определения форм F_i^l).

- Не сложнее проверяется и такое свойство построенных локальных тэта-функций Θ_i^l.

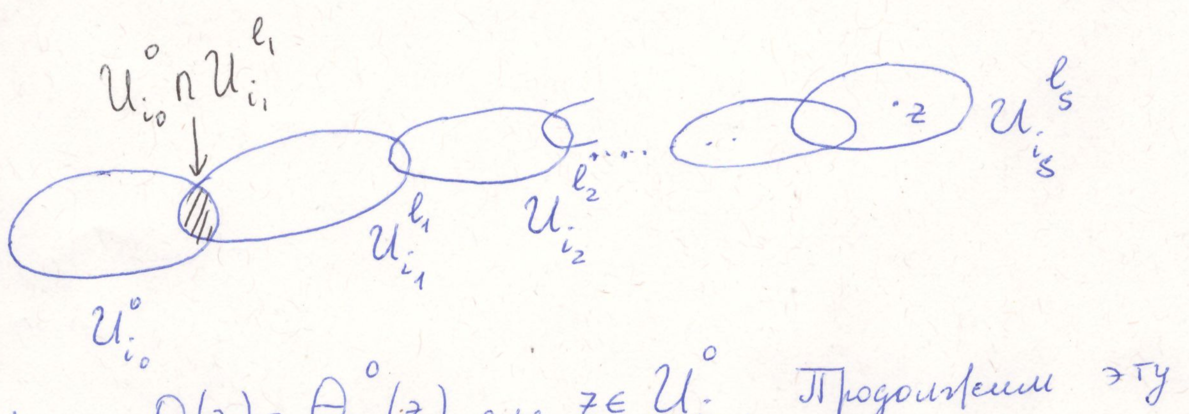
Задача 3.3. Если $z \in U_i^0$, то $z + l \in U_i^l$ и

$$\Theta_i^l(z + l) = \Theta_i^0(z) \cdot e(\text{const}). \qquad (*)$$

- Функции Θ_i^l рассогласованы на пересечениях, но (**) точно указывает меру рассогласования, а потому запускает процесс аналитического продолжения, которым мы воспользуемся для построения нужной тэта-функции. Этот процесс воспет поэтом Сергеем Михалковым (цитирую по памяти)

  Шаг за шагом, шаг за шагом,
  Шаг за шагом и уже
  Мы с отцом в универмаге
  На последнем этаже.

- Вот как это делается: фиксируем карту $U_{i_0}^{0}$ и точку z, в которой хотелось бы определить единую функцию тэта $\Theta(z)$. Точка z лежит на некоторой карте $U_{i_s}^{l_s}$. Соединим $U_{i_0}^{0}$ с $U_{i_s}^{l_s}$ галереей карт, как это показано на рис. 2.



Положим $\Theta(z) = \Theta_{i_0}^{0}(z)$ для $z \in U_{i_0}^{0}$. Продолжим эту функцию на карту $U_{i_1}^{l_1}$. С этой целью заметим, что (согласно (**)) на пересечении $U_{i_0}^{0} \cap U_{i_1}^{l_1}$ имеем:

$$\Theta^{l_1}_{i_1} = \Theta^{0}_{i_0}\, e\left(\sum_{p,q} a_{pq} (\bar{l}_1)_q z_p + const\right)$$

Следовательно, положив $\Theta(z) = \Theta^{l_1}_{i_1}\, e\left(-\sum a_{pq} (\bar{l}_1)_q z_p \;(+const)\right)$ для точки $z \in U^{l_1}_{i_1}$, мы согласуем все на пересечении $U^{0}_{i_0} \cap U^{l_1}_{i_1}$ и, тем самым, получим уже тэта-функцию, определенную на первых двух картах галереи. Продолжая в таком же стиле процесс согласования „пересечений", доберемся до точки z.

- Так как пространство $\mathbb{C}^n$ связно и односвязно, то указанная конструкция (по теореме об аналитическом продолжении) не зависит от выбора соединяющ[ей] галереи, т.е. не зависит от пути, по которому мы пришли в точку z. Ясно, что построенная голоморфная функция отлична от нуля.

- По индукции проверяется, что

Задача 3.4. Построенная ~~тэта-функ~~ глобальная функция $\Theta(z)$ удовлетворяет условию:

$$\Theta(z) = \Theta^{l}_{i}\, e\left(-\sum_{p,q} a_{pq} z_p \bar{l}_q + const\right)$$

- Наконец, с учетом $(*)$ доказывается, что

$$\Theta(z+l) = \Theta(z)\, e\left(-\sum_{p,q} a_{pq} z_p \bar{l}_q + const\right)$$

- Остается вспомнить, что ограничение Θ на U_i^l отличается на единицу из $\mathcal{O}(U_i^l)$ от $f_i(\pi(z))$ для всех l и i.
- Это означает, что $(\Theta) = \pi^*(D)$. Теорема доказана.

Замечание. Это долгое и трудное доказательство занимает в современных текстах (например, у Мамфорда) не больше 10 строк. Знание — сила!