

Задача 1. Докажите, что пересечение кривой с ее гессианом в точности совпадает с объединением множества особых точек и множества точек перегиба этой кривой. (Мы доказывали включение в одну сторону; надо проследить, что на самом деле все переходы равносильны.)

Задача 2. Как устроена поляра к кубику в ее точке перегиба?

Задача 3. Конфигурация из 9 точек перегиба неособой кубики обладает тем свойством, что на любой прямой, проходящей через две точки этой конфигурации лежит еще одна точка этой же конфигурации.

а) Докажите, что такая конфигурация изоморфна аффинной плоскости над полем из 3 элементов. (Изоморфизм конфигураций - это их биекция, согласованная с отношением инцидентности.)

б) Докажите, что такая конфигурация точек проективной плоскости над замкнутым полем характеристики не 2 и не 3 определена однозначно с точностью до проективного преобразования. (Существование такой конфигурации было доказано на прошлом семинаре предъявлением девятки точек перегиба кубики Ферма.)

Задача 4. Как мы уже знаем, фиксируя на гладкой кубику X в $\mathbb{CP}^2$ точку e , мы получаем на X групповой закон, то есть отождествление X с абелевой группой G , в которой e является нейтральным элементом. Пользуясь этим, найдите подгруппу элементов второго порядка в группе G . Постройте геометрически соответствующие элементам этой подгруппы точки на X при условии, что e - точка перегиба на X .

Задача 5. В условиях задачи 4 найдите подгруппу элементов четвертого порядка в G . Можно ли описать группу элементов порядка 2^k в G ?

Задача 6. В условиях задачи 4 найдите подгруппу элементов третьего порядка в группе G . Постройте геометрически соответствующие этим элементам точки на X при условии, что e - точка перегиба на X .

Задача 7. Существуют ли гладкая кубика и три точки перегиба на ней такие, что касательные прямые в этих точках пересекаются в одной точке? Если да, то укажите такую кубику.

Задача 8. Согласно ответу в задаче 2, поляра к гладкой кубику X в ее точке перегиба a распадается на касательную $T_a X$ в точке a и прямую I_a , пересекающую $T_a X$ в некоторой точке $b \neq a$. Прямая I_a называется *гармонической полярой* точки перегиба a . Докажите, что гармонические поляры I_{a_1} , I_{a_2} , I_{a_3} трех коллинеарных точек перегиба a_1 , a_2 , a_3 кубики X пересекаются в одной точке. (Указание: воспользуйтесь понятием пучка кривых.)