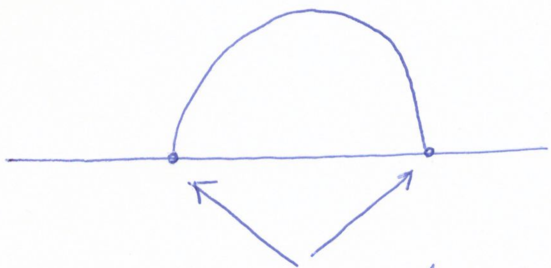
# Геодезические — неопределенные формы.

- Напомним, что с каждой неопределенной квадратичной формой $f = AX^2 + BXY + CY^2$, $B^2 - 4AC > 0$, связана прямая (геодезическая) $g(f)$, проходящая через нули квадратного трехчлена $At^2 + Bt + C = 0$ (если $A = 0$, то один из нулей равен $\infty$, т.е. $g(f)$ — это вертикальная прямая)



нули квадратного трехчлена.

- Следующие ~~две~~ две задачи изучают свойства этого отображения

Задача 2.1. Доказать, что отображение $f \longrightarrow g(f)$ сюръективно и $g(f) = g(\tilde{f}) \Longleftrightarrow \tilde{f} = \lambda f$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Задача 2.2. Доказать, что наше отображение эквивариантно относительно левого действия группы $GL^+(2, \mathbb{R})$, т.е. имеет место следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
f \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "A \in GL^+(2,\mathbb{R})"] & f \circ A^{-1} \arrow[d, "g"] \\
g(f) \arrow[r, "M(A)"] & M(A)g(f) = g(f \circ A^{-1})
\end{tikzcd}$$

- Напомним, что $GL^+(2,\mathbb{R}) = \{A \in M(2,\mathbb{R}) \mid \det A > 0\}$,

  $M : PGL_2^+(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Isom}\, H^2$, $H^2$ – плоскость Лобачевского (в модели верхней полуплоскости).

- <u>Центральный</u> <u>результат.</u>

Теорема. Расстояние (со знаком) от орицикла $O\left(\frac{p}{q}\right)$ до геодезической $g(f)$ равно

$$d\left(O\left(\frac{p}{q}\right), g(f)\right) = \log \frac{2|f(p,q)|}{\sqrt{B^2-4AC}}$$

Комментарий. Если вспомнить, что начинали мы с вопроса о том, для каких форм $f$ число $M(f) = \inf\limits_{(\mathbb{Z}^2)^*} \frac{2|f(p,q)|}{\sqrt{B^2-4AC}}$ максимально, то становится понятным его (вопроса) геометрический пересказ.

Задача. 2.3. Доказать теорему.

(Начните со случая горизонтального орицикла $q=0$).