

Задание 2

В задачах 1 - 3 необходимо нарисовать фазовые портреты механических систем, указав все его особые точки и синяртрысы и расставив стрелки. Портрет — качественный (не буквально точкой), но подробный и правдоподобный (см. все свойства фазовых кривых из записок лекций). Система представляет собой одномерную частицу  $m=1$  в потенциале  $U(x)$ .

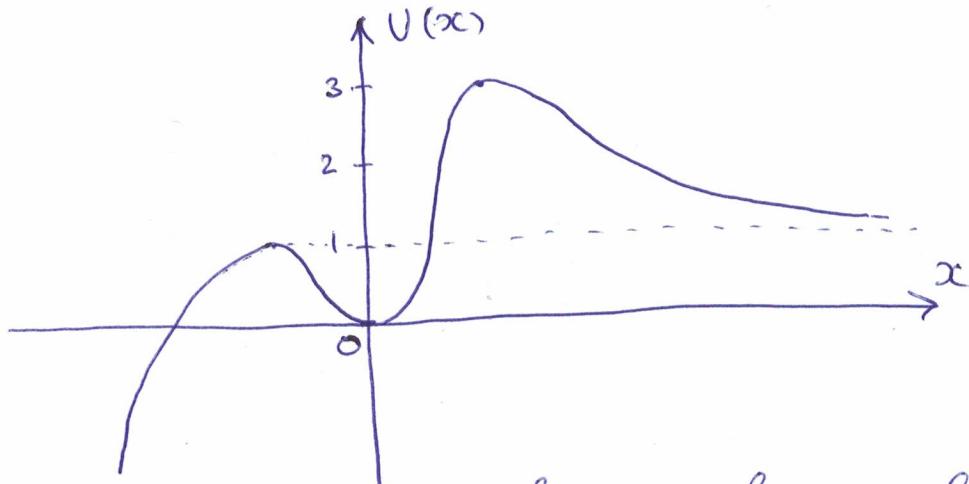
① Потенциал Морса  $U(x) = e^{-2x} - 2e^{-x}$

Реш: этот потенциал используется в физике для описания колебаний атомов в двухатомной молекуле.  $x$  измеряет отклонение атомов в молекуле от положения равновесия.

② Потенциал  $U(x) = x^2 - \frac{x^4}{2}$ .

Для этого фазового портрета дополнительно определите число фазовых кривых, отвечающих различным значениям энергии  $E = -1; 0; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; 1$ .

③ Потенциал  $U(x)$ , задаваемый графиком



Определите число фазовых кривых, отвечающих различным значениям энергии  $E = 0, 1, 2, 3$ .

(2)

④ Докажите формулу для угла наклона  
к сепаратрисе фазового портрета в точке  
неустойчивого равновесия

$$\operatorname{tg} \alpha = \pm \sqrt{-\frac{U''(x_0)}{m}}$$

Здесь  $U(x)$  — потенциал, в котором движется  
частица массы  $m$ ;  $x_0$  — точка неустойчивого  
равновесия

⑤ Закон сохранения энергии частицы массы  $m$   
в потенциале  $U(x)$  можно переписать в виде  
обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (E - U(x))}$$

Решив это уравнение, докажите, что время  
движения частицы по сепаратрисе до положения  
неустойчивого равновесия бесконечно.

⑥\* (Задача из книги В.И.Аркадьева "Мат. методы классической механики" §4).

Пусть  $S(E)$  площадь фигуры, ограниченной  
замкнутой фазовой кривой, соответствующей  
уровню энергии  $E$ . Докажите, что период об-  
ращения частицы  $\frac{\text{массы } m}{\text{по этой кривой}}$  равен

$$T = m \frac{dS}{dE}.$$