

Задача 1. Пусть G абелева группа (записываемая аддитивно) и n - натуральное число. Докажите, что множество элементов $x \in G$ таких, что $nx = 0$, является подгруппой. Она называется подгруппой n -кручения группы G . Мы уже доказали существование структуры абелевой группы на неособой кубике. Опишите теперь подгруппу n -кручения этой группы G для:

(i) $n = 2$;

(ii) $n = 3$.

Эти подгруппы имеют красивую геометрическую интерпретацию, если в качестве нулевого элемента выбрать точку перегибы кубики.

Задача 2. В условиях предыдущей задачи опишите подгруппу n -кручения группы G :

(i) для $n = 4$;

(ii) для $n = 2^m$, $m \geq 1$.

Задача 3. Существуют ли гладкая кубика и три точки перегиба на ней такие, что касательные прямые в этих точках пересекаются в одной точке? Если да, то укажите такую кубика.

Задача 4. Согласно ответу в задаче 2, поляра к гладкой кубике X в ее точке перегиба a распадается на касательную $\mathbb{T}_a X$ в точке a и прямую I_a , пересекающую $\mathbb{T}_a X$ в некоторой точке $b \neq a$. Прямая I_a называется *гармонической полярной* точки перегиба a . Докажите, что гармонические поляры I_{a_1} , I_{a_2} , I_{a_3} трех коллинеарных точек перегиба a_1 , a_2 , a_3 кубики X пересекаются в одной точке. (Указание: воспользуйтесь понятием пучка кривых.)

Задача 5. Как мы видели, девять точек перегиба неособой кубики являются примером конфигурации, абстрактное определение которой звучит примерно так. Это конечное множество и некоторый набор его трехэлементных подмножеств, называемых прямыми, таких что через любые две точки проходит единственная прямая. Мы выяснили, что любая такая конфигурация должна состоять из нечетного числа точек $(2n + 1)$, через каждую точку проходит n прямых, а общее число прямых равно $\frac{n(2n+1)}{3}$, откуда следует, что остаток от деления числа n на 3 не должен быть двойкой. Тем самым число точек в такой конфигурации может быть только 3, 7, 9, 13, 15, ... Мы знаем геометрическую конструкцию таких конфигураций для 3, 7, 9: для 7 это проективная плоскость над полем из 2 элементов, а для 9 — аффинная плоскость над полем из трех элементов. (Для 9 мы даже доказали единственность!). Нетрудно объяснить 15: это трехмерное проективное пространство над полем из двух элементов. Предлагается подумать, существует ли такая конфигурация для 13, особенно интересно было бы придумать для нее какую-то геометрическую конструкцию.

Задача 6. Сизигическим пучком кубик называется пучок кубик $\mathbb{CP}^2$, содержащий гладкую кубика X и ее гессиан $H(X)$. Примером сизигического пучка является пучок $\{x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + ax_0x_1x_2 = 0 \mid a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}\}$, для которого $X = \{x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 = 0\}$ - кубика Ферма, а гессиан $H(X) = \{x_0x_1x_2 = 0\}$ - тройка прямых. Сколько в этом пучке имеется особых кубик?

Задача 7. Докажите, что гессиан неособой кубики кубики, отличной от кубики Ферма, неособ, а у кубики Ферма он распадается на 3 прямые.

Задача 8. Пусть X - произвольная гладкая кубика в пучке сизигических кубик, и пусть a - какая-либо из базисных точек пучка. Как мы знаем, a является точкой перегиба для X , и пусть $l = \mathbb{T}_a X$.

(i) Докажите, что в этом сизигическом пучке имеется единственная кубика Y , касающаяся прямой l в некоторой точке $b \neq a$.

(ii) Докажите, что $Y = H(X)$ - гессиан кубики X .