Семинар 3

Работа, потенциальные силы

Краткий теормининимум к семинару:

Пусть $\gamma: \vec{r}(t),\ t \in [t_0, t_1]$ – отрезок траектории частицы между моментами времени t_0 и t_1.

$\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ – сила, действующая на частицу.

Работа этой силы над частицей на траектории γ:

$$A_\gamma := \int\limits_\gamma (\vec{F}, d\vec{r}) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\vec{F}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t), \dot{\vec{r}}(t)\right) dt$$

↑ скалярное произведение векторов

Сила называется потенциальной, если

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} U(\vec{r}) \equiv -\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial \vec{r}}$$

Здесь $U(\vec{r})$ – потенциал, рождающий силу $\vec{F}$.

В декартовых координатах:

$$\vec{\nabla} U(\vec{r}) = (\partial_x U, \partial_y U, \partial_z U)$$

$$\left(\partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x},\ \text{etc.}\right)$$

Для потенциальной силы 1-форма

$$(\vec{F}, d\vec{r}) = -(\vec{\nabla} U, d\vec{r}) = -dU(\vec{r}) \text{ – точная}$$

При этом работа

$$A_\gamma = \int_\gamma (\vec{F} d\vec{r}) = U(\vec{r}(t))\Big|_{t_1}^{t_0} \Leftrightarrow A_\odot = 0$$

для $\forall$ замкнутой траектории $\odot$

Работа потенциальной силы не зависит от формы траектории γ, а зависит лишь от положения её концов.

Необходимое условие точности формы ω – её замкнутость

$$\omega = df \Rightarrow d\omega = 0$$

Условия замкнутости формы $(\vec{F}, d\vec{r})$ в декартовых координатах

$$d(\vec{F}, d\vec{r}) = 0 \Leftrightarrow \partial_i F_j = \partial_j F_i \quad \forall i, j,$$

здесь обозначили: $\{\partial_x, \partial_y, \partial_z\} \equiv \{\partial_1, \partial_2, \partial_3\}$

$\{F_x, F_y, F_z\} \equiv \{F_1, F_2, F_3\}$.

Лемма Пуанкаре: если конфигурационное пространство механической системы односвязно, то есть любой замкнутый контур в нём стягивается

то замкнутость 1-формы ≡ её точность:

$$\boxed{d(\vec{F}\,d\vec{r}) = 0 \iff (\vec{F}, d\vec{r}) = -dU}$$

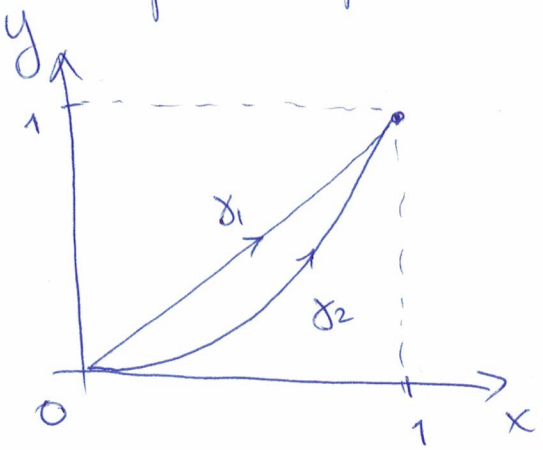
Теперь перейдем к разбору примеров:

Пример 1 Сила $\vec{F}$ с координатами

$$F_x = 1 + y, \quad F_y = \alpha x + 2y$$

($\alpha = const$ – параметр)

действует в $\mathbb{R}^2$. Вычислите работу силы на траекториях



γ_1: (vt, vt), $t \in [0, 1/v]$

v – скорость движения частицы, постоянный параметр

γ_2: (t, t^2), $t \in [0,1]$

Обе траектории имеют концы $(0,0)$ и $(1,1)$ (см. Рис.)

Решение:

Для γ_1 $d\vec{r} = (v\,dt, v\,dt)$, поэтому

$$A_{\gamma_1} = \int_0^{1/v} \{(1+vt)v\,dt + (\alpha \cdot vt + 2 \cdot vt)v\,dt\} =$$

замена $s = vt$

$$\int_0^1 ds\,(1 + (\alpha+3)s) = \left(s + (\alpha+3)\frac{s^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{\alpha+5}{2}$$

Для γ_2: $d\vec{r} = (dt, 2t\,dt)$, поэтому

$$A_{\gamma_2} = \int_0^1 \{ (1+t^2)\,dt + (\alpha t + 2t^2)\,2t\,dt \} =$$

$$= \left(t + (1+2\alpha)\frac{t^3}{3} + 4\cdot\frac{t^4}{4} \right)\Big|_0^1 = \frac{7+2\alpha}{3}$$

Замечаем, что $A_{\gamma_1} = A_{\gamma_2}$ только если $\alpha = 1$. В этом случае выполнено условие $\partial_x F_y = \partial_y F_x$, то есть сила $\vec{F}$ потенциальна.

Как найти отвечающий ей потенциал $U(x,y)$?

Общий метод: решить систему дифуров:

$$\begin{cases} \partial_x U(x,y) = -F_x = -(1+y) \\ \partial_y U(x,y) = -F_y = -(x+2y) \end{cases} \quad /\text{помним, } \alpha = 1/$$

Сначала интегрируем 1-е уравнение по X при постоянном y (∂_x – производная по x при $y = \text{const}$):

$$U(x,y) = -\int dx\,(1+y)\Big|_{y=\text{const}} = -x(1+y) + C(y)$$

↑ это константа интегрирования по x, но она может быть разной при разных значениях параметра y.

Подставляем полученное выражение для $U(x,y)$ во второе уравнение системы:

$$-x + C'(y) = -(x+2y)$$

и получаем уравнение на $C(y)$:

$$C'(y) = -2y \Rightarrow C(y) = \int(-2y)dy = -y^2 + C$$

уже просто константа.

В итоге: $\boxed{U(x,y) = -x - xy - y^2 + C}$

Поскольку нас интересует не сама $U(x,y)$, а $dU = -(\vec{F}, d\vec{r})$, то константу C можно не выписывать.

Потенциальная энергия определяется с точностью до константы.

Ответ в этой задаче можно было увидеть сразу методом "пристального взгляда":

Запишем dU:

$$dU = -(\vec{F}, d\vec{r}) = -(1+y)dx - (x+2y)dy =$$

$$= -dx - 2ydy - (ydx + xdy) = -dx - d(y^2) - d(xy)$$

группируем полные дифференциалы

$$= -d(x + xy + y^2)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{U = -x - xy + y^2}$$

Вернёмся к обсуждению работы силы $\vec{F}$ при произвольном α.

Замечаем, что A_{γ_1} не зависит от значения параметра v, т.е. от скорости движения точки по траектории γ_1.

Вопрос: Почему это так для нашей $\vec{F}$? Для каких сил $\vec{F}$ работа может зависеть от скорости движения вдоль траектории?

Ответ: Наша сила $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ не зависит явно от $\dot{\vec{r}}$ и t. В случае, когда сила зависит явно от скорости движения точки и/или от времени, её работа может зависеть от скорости движения вдоль траектории. Обоснуйте.

Пример 2 Путник пересекает поле из точки $A=(0,0)$ в точку $B=(1,1)$ по траектории

$$\gamma: \quad \vec{r}(t) = v(t,t), \quad t=[0, 1/v],$$
$$v = \text{const} > 0$$

В это время в поле дует ветер. Скорость ветра $\vec{V} = (1,0)$.

Сила сопротивления ветра прямо пропорциональна скорости воздуха относительно путника (вязкое трение):

$$\vec{v}_{\text{отн.}} = \vec{V} - \dot{\vec{r}}(t)$$

Вычислите работу, производимую ветром над

путникам.

Решение: Сила ветра, действующая на путника $\vec{F} = k\vec{v}_{отн.} = k(\vec{V} - \dot{\vec{r}}) = k(1-v; -v)$ $(k = const > 0)$

Учитывая, что $d\vec{r} = (v, v)dt$

вычисляем интеграл работы

$$A_{ветра} = \int_0^{1/v} (\vec{F}, \dot{\vec{r}})dt = k\int_0^{1/v} \{(1-v)v - v\cdot v\}dt =$$

$$= k\int_0^1 \{(1-v) - v\}ds = k(1-2v)$$

(замена $s = vt$)

Видно, что работа силы зависит от скорости путника v. Это потому, что сила ветра от неё зависела.

Замечаем, что работа ветра может быть как положительной (помогает при $v < 1/2$), так и отрицательной (мешает при $v > 1/2$)

Зависимость работы от скорости движения вдоль траектории гарантирует, что она не потенциальна. Силы трения всегда не потенциальны. Их работа вдоль замкнутой траектории $\neq 0$, поскольку они направлены против $d\vec{r}$ $\Rightarrow (\vec{F}, d\vec{r}) < 0$

Пример 3

На материальную точку в $\mathbb{R}^3$ действует сила, декартовы координаты которой имеют вид:

$$F_x = 2x + y, \quad F_y = x + z^2, \quad F_z = 2yz + 1$$

а) Определите, является ли она потенциальной.

б) Если да, то постройте ее потенциал.

Решение: а) Проверим все 3 условия:

$\partial_x F_y = \partial_y F_x$: $1 = 1$ – выполнено

$\partial_x F_z = \partial_z F_x$: $0 = 0$ – выполнено

$\partial_y F_z = \partial_z F_y$: $2z = 2z$ – выполнена.

Эта сила потенциальна в любой односвязной области $\mathbb{R}^3$.

б) Строим $U(x, y, z)$ общим методом

* Интегрируем уравнение $F_x = 2x + y = -\partial_x U(x, y, z)$ по x при $y = \text{const}$ и $z = \text{const}$:

$$U(x, y, z) = -\int (2x + y)\, dx = -x^2 - xy + C(y, z)$$

** Подставляем результат в уравнение $F_y = x + z^2 = -\partial_y U$ и интегрируем по y при $x = \text{const}$ и $z = \text{const}$:

$$C(y, z) = \int \{x - (x + z^2)\}\, dy = -z^2 y + C(z)$$

*** Подставляем результат в уравнение

$F_z = 2yz+1 = -\partial_z U$ и интегрируем по z

при $x=\text{const}$, $y=\text{const}$:

$$C(z) = \int \{2zy - (2yz+1)\} dz = -z + C$$

Ответ: $U(x,y,z) = -x^2 - xy - z^2 y - z + C$

Метод "пристального взгляда" :

$$dU = -(\vec{F}, d\vec{r}) = -(2x+y)dx - (x+z^2)dy - (2yz+1)dz$$

$$= -2x\,dx - (y\,dx + x\,dy) - (z^2 dy + 2z\,dz\cdot y) - dz =$$

сгруппировали полные дифференциалы

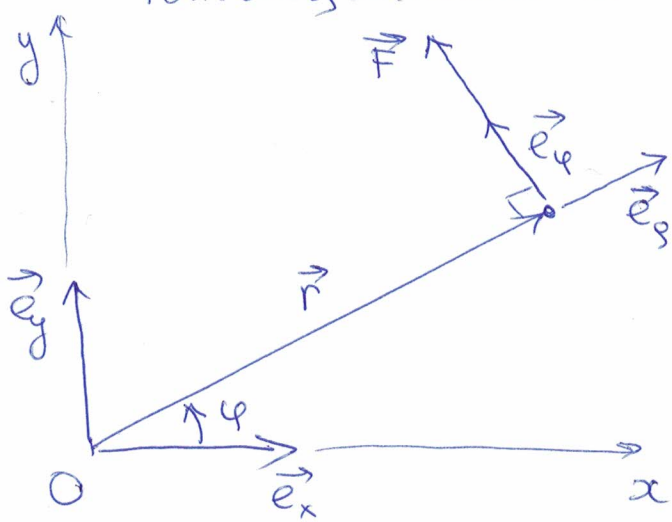
$$= -d(x^2 + xy + yz^2 + z)$$

$$\Downarrow$$

$$U = -x^2 - xy - yz^2 - z,$$

Пример 4 | Тангенциальная сила в $\mathbb{R}^2$

Тангенциальная сила имеет вид



$\vec{F} = f(x,y)\,\vec{e}_\varphi$, где

f - произвольная гладкая функция

$\vec{e}_\varphi$ - орт полярной системы координат. (см. Рис.)

Для каких $f(x,y)$ эта сила потенциальна?

Решим сначала задачу "в лоб" в декартовых координатах. Надо проверить, для каких f выполняется условие $\partial_x F_y = \partial_y F_x$.

В декартовых координатах $\vec{e}_\varphi = \left(-\frac{y}{\rho}, \frac{x}{\rho}\right)$, где $\rho = (x^2+y^2)^{1/2}$. Считаем:

$$\partial_y F_x = \partial_y\left(-\frac{y}{\rho} f(x,y)\right) = -\frac{f}{\rho} + \frac{y^2}{\rho^3} f - \frac{y}{\rho}\partial_y f,$$

т.к. $\partial_y \rho = \frac{y}{\rho}$

$$\partial_x F_y = \partial_x\left(\frac{x}{\rho} f(x,y)\right) = \frac{f}{\rho} - \frac{x^2}{\rho^3} f + \frac{x}{\rho}\partial_x f,$$

т.к. $\partial_x \rho = x/\rho$.

Приравнивая два этих выражения получаем условие на f:

$$\boxed{(y\partial_y + x\partial_x) f = -f}$$

Выясним, что это за дифференциальный оператор действует на f.

Поскольку

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \frac{\partial(\rho\cos\varphi)}{\partial \rho} = \cos\varphi = \frac{x}{\rho},$$

$$\frac{\partial y}{\partial \rho} = \frac{\partial(\rho\sin\varphi)}{\partial \rho} = \sin\varphi = \frac{y}{\rho},$$

то

$$\frac{\partial}{\partial \rho} = \frac{\partial x}{\partial \rho}\cdot\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \rho}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{\rho}(x\partial_x + y\partial_y),$$

то есть

$$\boxed{x\partial_x + y\partial_y = \rho\frac{\partial}{\partial \rho}} \quad (*)$$

– это оператор, "вычисляющий" степень однородного многочлена

от переменной ρ:

$$(x\partial_x + y\partial_y)\rho^k = k\cdot\rho^k.$$

Поэтому наша функция f должна иметь степень -1 по ρ:

$$f(x,y) = \frac{C(\varphi)}{\rho},$$

где $C(\varphi)$ – гладкая функция φ

На самом деле при решении "в лоб" переход (*) мы фактически "угадали", а не "вывели".

Условие же задачи, в котором $\vec{F} \parallel \vec{e}_\varphi$ фактически "диктует" нам, что правильной системой координат для решения задачи является полярная.

Решим задачу сразу в полярных координатах:

$$d\vec{r} = dx\,\vec{e}_x + dy\,\vec{e}_y = \underbrace{d\rho\,\vec{e}_\rho + \rho\,d\varphi\,\vec{e}_\varphi}$$

сравните с выражением для $\vec{r}$ в полярных координатах.

Поэтому учитывая, что полярные координаты тоже ортогонормированы

$$(\vec{F}, d\vec{r}) = F_\rho\,d\rho + F_\varphi\,\rho\,d\varphi.$$

Для тангенциальной силы $F_\rho = 0$, $F_\varphi = f$, поэтому

$$(\vec{F}, d\vec{r}) = \rho\cdot f\,d\varphi$$

Чтобы это выражение стало полным диффе-

рециалом, очевидно, требуется

$$\rho \cdot f = C(\varphi), \text{ т.е.}$$

$$\boxed{f = \frac{C(\varphi)}{\rho}}$$ – тот же ответ без особых усилий.

И всё же это не конец истории. Мы проверим необходимые условия потенциальности силы $\vec{F}$, и получили ответ в полярных координатах. Но они являются "хорошими" координатами не во всей $\mathbb{R}^2$, а в <u>неодносвязной области $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$</u>. Тут лемма Пуанкаре не работает, и надо вручную проверить условие <u>зануления работы по нестягиваемому в точку замкнутому контуру</u>. Достаточно проверить подходящий из них, скажем по контуру $\gamma_0: \rho = 1$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Остальные контуры гомотопически эквивалентны этому.

Вычислим

$$A_{\gamma_0} = \int_{\gamma_0} (\vec{F}, d\vec{r}) = \int_0^{2\pi} \frac{C(\varphi)}{\rho} \cdot \rho \, d\varphi \Big|_{\rho=1} = 0$$

Получили условие:

$$\boxed{\int_0^{2\pi} C(\varphi) d\varphi = 0}$$

Только для таких $C(\varphi)$ тангенциальная сила потенциальна. Также считаем $C(\varphi)$ 2π-периодической для однозначности задания $\vec{F}$.