• На прошлой лекции мы фактически доказали следующий нетривиальный факт: произвольный фактор автоморфности для решетки L в конечномерном векторном комплексном пространстве V эквивалентен фактору автоморфности вида

$$\theta(l,z) = e\Big(-\sum a_{jk} z_j \bar{l}_k + \mathrm{const}\Big) = e\Big(-\sum_{j,k} a_{jk} z_j \bar{l}_k + c_l\Big) = e\big(-Q_l(z) + c_l\big),$$ где

$e(\ ) = e^{2\pi i}$, а $Q_l(z)$ — это линейная по z функция при фиксированном $l \in L$. Назовем его тэта-фактором.

•• Наша ближайшая цель — получить необходимые условия на функции $Q_l(z)$, входящие в тэта-фактор автоморфности. В дальнейшем мы покажем, что найденные условия являются и достаточными.

••• Начнем с нужной нестандартной линейной алгебры.

Квази-эрмитовы формы.

Пусть V — комплексное векторное пространство. Комплексно-значная функция $Q(z,w)$ на $V \times V$ называется квази-эрмитовой формой, если а) $Q(z, w)$ по переменной z $\mathbb{C}$-линейна.

б) $Q(z, w)$ по переменной w $\mathbb{R}$-линейна

в) $A_Q(z,w) = \frac{1}{2i}\Big(Q(z,w) - Q(w,z)\Big)$ (это $\mathbb{R}$ линейная кососимметрическая форма) принимает вещественные значения

Примеры. а) Эрмитова форма на комплексном векторном пространстве

б) форма $z\bar{w} + zw$

• Лемма 4.1.
Для того, чтобы квазиэрмитова форма $Q(z,w)$ была эрмитовой, необходимо и достаточно, чтобы

$$Q(iz, w) + Q(z, iw) = 0 \qquad (*)$$

□ Докажем, что при выполнении условие $(*)$ $Q(z,w) = \overline{Q(w,z)}$.

Имеем, $Q(iz, w) = -Q(z, iw) = -\left\{2i A_Q(z, iw) + Q(iw, z)\right\}$

$= -2i A_Q(z, iw) - i\,Q(w, z)$ или

$i\,Q(z,w) = -2i A_Q(z, iw) - i\,Q(w,z)$ и

$Q(z,w) + Q(w,z) = -2A_Q(z, iw)$ (= вещественное число)

С учетом свойства в) получаем нужное равенство
$Q(z,w) = \overline{Q(w,z)}$

В другую сторону выкладка еще короче. □

Задача 4.1. Покажите, что а) форма

$$H(z,w) = \frac{1}{2i}\Big(Q(iz,w) - Q(z,iw)\Big)$$ эрмитова, если

форма Q квазиэрмитова.

б) форма $S(z,w) = \frac{1}{2i}\Big(Q(iz,w) + Q(z,iw)\Big)$ при том же

условии является $\mathbb{C}$-билинейной симметрической

формой

• Задача 4.1 приводит к ожидаемому результату

Маленькая теорема.

Форма $Q(z,w)$ тогда и только тогда квазиэрмитова,

когда она (единственным образом) представима суммой эрмитовой формы

и $\mathbb{C}$-билинейной симметрической формы

$$Q(z,w) = H(z,w) + S(z,w)$$

(H называется эрмитовой частью Q, а S – её симметрической

частью).

Пример. $Q(z,z) = |z|^2 + z^2$ – квазиэрмитова форма.

• Меморандум Эрмита.

Эрмит учил, что ~~если~~ $H(z,w)$ эрмитова форма в комплексном

векторном пространстве V, то

а) $H = \operatorname{Re} H + i \operatorname{Im} H$, причем $\operatorname{Re} H$ — это $\mathbb{R}$-билинейная симметрическая форма, а $\operatorname{Im} H$ — это $\mathbb{R}$-билинейная кососимметрическая форма, которую я обозначу буквой A;

б) $A(iz, iw) = A(z, w)$ и $H(z, w) = A(iz, w) + iA(z, w)$

Задача 4.2. Проверьте!

Вот еще одно полезное свойство эрмитовых форм

Лемма 4.2. Ядро кососимметрической формы A состоит из изотропных векторов формы H

Следствие. Если $H > 0$, то форма A невырождена.

□ Доказательство леммы 4.2

Пусть $z_0 \in \operatorname{Ker} A$. Это значит, что $A(z_0, w)$ для любого $w \in V$. Покажем, что $iz_0 \in \operatorname{Ker} A$. Имеем, $A(iz_0, w) = A(-z_0, iw) =$
$= -A(z_0, iw) = 0$. Еще раз воспользуемся б):

$$H(z_0, z_0) = A(iz_0, z_0) + iA(z_0, z_0) = 0 + 0 = 0$$

(первый нуль по доказанному, а второй — по определению кососимметрической формы).

Задача 4.3. Если $H \geq 0$, то $z_0 \in \operatorname{Ker} A \Longleftrightarrow H(z_0, z_0) = 0$

Замечание. $\operatorname{Ker} A$ иногда называют радикалом формы и пишут $\operatorname{Rad} A$

• Для чего я это вам рассказываю?

Теорема 4.1. Пусть $\theta(\ell, z) = e\left(Q_\ell(z) + c_\ell\right)$ – фактор автоморфности для решетки L. Тогда существует такая квазиэрмитова форма $Q(z,w)$, что

а) $Q(z, \ell) = 2i Q_\ell(z)$

б) Кососимметрическая форма $\frac{1}{2i}\left(Q(z,w) - Q(w,z)\right)$ принимает целые значения на ~~решетке~~ $L \times L$

в) если $Q = H + S$ разложение формы Q на эрмитову и симметрическую части, то $H \geq 0$.

Замечание. Из всего сказанного должно быть ясно, что кососимметрическая форма $\frac{1}{2i}\left(Q(z,w) - Q(w,z)\right)$ совпадает с кососимметрической формой $\operatorname{Im} H = A$.

В связи с этим уместно следующее определение.

• Эрмитова форма Римана.

Пусть V – комплексное векторное пространство, $L \subset V$ – решетка полного ранга. Эрмитова форма H называется формой Римана для пары (V, L), если $H \geq 0$ и $(\operatorname{Im} H)(L \times L) = A(L \times L) \in \mathbb{Z}$.

Пример 1. $H(z,w) = \frac{1}{\operatorname{Im}\tau} z\bar{w}$ – это риманова эрмитова форма для пары $(\mathbb{C},\ L = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$

Пример 2. В примере 1 рассматриваемая форма Римана невырождена. Вот весьма нетривиальное обобщение на решетки $L \subset V^n$. Напомню, что каждая такая решетка задается (тоже подходящего выбора базиса в V) матрицей периодов $\Omega_{n\times 2n} = (E_n, \tau_{n\times n})$. Любой вектор из решетки L (в базисе, состоящем из столбцов матрицы периодов) записывается в виде: $l = E_n m + \tau_n k$, где m и k – целочисленные вектор-столбцы (Обратите внимание: τ_n зависит от выбора базиса решетки)

Теорема (я не знаю, пока, сумеем ли мы ее доказать. Доказательство можно найти у Мамфорда "Лекции о тэта функциях", у Мастера оно занимает 10 строчек)

• Решетка $L = E_n m + \tau_n k$ в $\mathbb{C}^n$ тогда и только тогда допускает невырожденную риманову эрмитову форму H,

когда а) $\tau_n^t = \tau_n$ (= τ комплексная симметрическая матрица порядка n),

б) $\operatorname{Im}\tau_n > 0$ (мнимая часть которой положительно определена)

•• Решетки L в $\mathbb{C}^n$, допускающие риманову невырожденную эрмитову форму, – это ровно те решетки, для которых комплексный тор $T = \mathbb{C}^n/L$ является проективным алгебраическим многообразием, которое называется абелевым многообразием.

• • • Риманова форма для алгебраической решетки $L = (E, \tau)$ выглядит так

$$H(z, w) = z^t (\operatorname{Im}\tau)^{-1} \overline{w}$$

• Переходим к доказательству пп. а) и б) теоремы 4.1.

□ Вспоминая, что $\Theta(z, l) = e\left(Q_l(z) + c_l\right)$ — это фактор автоморфности для решетки L, получаем

$$Q_{l_1+l_2}(z) + c_{l_1+l_2} \equiv Q_{l_1}(z + l_2) + c_{l_1} + Q_{l_2}(z) + c_{l_2} \pmod{\mathbb{Z}}$$

для любых $l_1, l_2 \in L$. Следовательно,

1) $$Q_{l_1+l_2}(z) = Q_{l_1}(z) + Q_{l_2}(z) \quad \text{и}$$

2) $$c_{l_1+l_2} \equiv Q_{l_1}(l_2) + c_{l_1} + c_{l_2} \pmod{\mathbb{Z}}$$

Из 2) следует, что

$$Q_{l_1}(l_2) = Q_{l_2}(l_1) \pmod{\mathbb{Z}}. \quad l_1, l_2 \in L.$$

Из 1) следует, что $Q_l(z)$ $\mathbb{C}$ линейно по z и $\mathbb{Z}$-линейно по l. Но решетка L свободно порождает пространство V над $\mathbb{R}$. Поэтому при фиксированном z существует единственное $\underline{\mathbb{R}\text{-линейное}}$ расширение $Q_l(z)$ на V, которое мы обозначим через $Q_w(z)$. Докажем, что

$$Q(z,w) = 2i\, Q_w(z)$$

является искомой квазиэрмитовой формой. $\mathbb{R}$-линейность по w и $\mathbb{C}$-линейность по z нам обеспечены по построению. Осталось проверить условие в) в определении квазиэрмитовости.

Посмотрим на форму $A(z,w) = \frac{1}{2i}\big(Q(z,w) - Q(w,z)\big) = Q_w(z) - Q_z(w)$

Так как $Q_{l_1}(l_2) \equiv Q_{l_2}(l_1) \pmod{\mathbb{Z}}$, то — это $\mathbb{R}$-линейная кососимметрическая форма $A(z,w)$, целочисленная на $L \times L$. Тем самым, она принимает вещественные значения на V □

• Осталось доказать п. в) теоремы 4.1 и разобраться с константой c_l. Но это уже в следующей лекции.

<u>Приложение.</u> Из рассказов Николая Петровича.

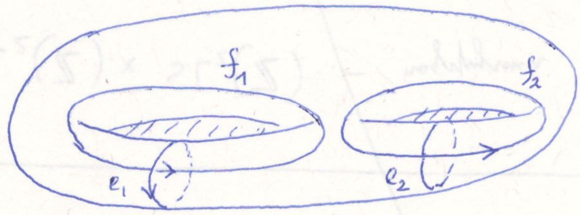
Пусть S — замкнутая (= компактная и без края) связная, ориентированная топологическая поверхность рода g. В вещественном пространстве $H_1(S,\mathbb{R})$ размерности $2g$ определена кососимметрическая билинейная форма A (индекс пересечения), которая принимает целые значения на решетке $L_S = H_1(S,\mathbb{Z}) \subset H_1(S,\mathbb{R})$.

Ранг $\mathbb{Z}$-модуля L_S равен $2g$. Известно, что форма „индекс пересечения" унимодулярна. Это означает, что в любом базисе решетки L_S (= базисе в целочисленных гомологиях поверхности S) определитель матрицы Грама кососимметрической ~~матрицы~~ формы A равен 1.

Воспользуемся следующим общим фактом (см. например Э. Б. Винберг „Курс алгебры"): если решетка L унимодулярна относительно кососимметрической билинейной формы, то L допускает базис $e_1, \dots, e_g, f_1, \dots, f_g$, в котором её матрица Грама имеет вид

$$J = \left(\begin{array}{c|c} & E_g \\ \hline -E_g & \end{array}\right)$$

Такой базис назовем симплектическим. Выберем в решетке L_S ранга $2g$ симплектический базис $e_1, \dots, e_g, f_1, \dots, f_g$.



$g = 2$

- Оператор J с матрицей J в выбранном симплектическом базисе таков, что $J^2 = -E$. Следовательно, оператор J задает в четномерном пространстве $V = H_1(S, \mathbb{R})$ комплексную структуру (умножить вектор v на i – это значит применить к нему оператор J). Рассмотрим, наконец, эрмитову форму на пространстве V

$$H(v, w) = A(Jv, w) + i\, A(v, w)$$

- <u>Задача Николая Петровича.</u> а) Докажите, что $H > 0$.
  б) Как выглядит матрица периодов решетки L_S в базисе $e_1, \dots, e_g$ комплексного пространства V?
- Если Николай Петрович прав, то $(H_1(S, \mathbb{R}), H_1(S, \mathbb{Z}))$ – это важный пример пары Римана.
- Если на поверхности S ввести комплексную структуру, то у рассказа Николая Петровича есть захватывающее продолжение…