Конструктивные методы функционального анализа.
Листок 3.

Срок сдачи - 26 мая.

1. Пусть A – оператор умножения на непрерывную вещественную функцию $a(x)$ в пространстве $L^2(0,1)$. Доказать, что A – самосопряженный оператор и найти спектр A.

2. Пусть $A = d/dx$ оператор в $L^2((0,\infty), dx)$ с областью определения $D(A) = \{\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) |\, \mathrm{supp}\varphi \subset (0,\infty)\}$. Найти A^* и $D(A^*)$.

3. Пусть $f \in L^1(\mathbb{R}, dx)$. Найти спектр оператора свертки, $(S_f\varphi)(x) = \int dy\, f(x-y)\varphi(y)$, в пространстве $L^2(\mathbb{R}, dx)$.

4. Пусть A – самосопряженный оператор а I – единичный оператор.
   - (a) Доказать, что оператор $(A+iI)(A-iI)^{-1} = U$ унитарен.
   - (b) Доказать, что $\mathrm{Ker}(U-I) = \{0\}$

5. Пусть U унитарный оператор, для которого $\mathrm{Ker}(U-I) = \{0\}$. Доказать, что оператор $A = i(U+I)(U-I)^{-1}$ с областью определения $D(A) = \mathrm{Ran}(U-I)$ самосопряжен, где Ran обозначает образ оператора.

6. Вычислить оператор A в условиях задачи (5), если U – оператор сдвига на 1 в $\ell^2(\mathbb{Z})$.

7. Доказать, что спектр самосопряженного оператора лежит на вещественной оси.

8. Доказать, что самосопряженный оператор A не имеет симметрических расширений, отличных от A.

9. Привести к виду умножения на функцию оператор свертки S_f (см. задачу (3)), где $f \in L^1(\mathbb{R}, dx)$. Для каких функций этот оператор самосопряжен?

10. Доказать, что оператор конечной разности $\Delta_h\varphi(x) \equiv \dfrac{1}{h}[\varphi(x+h) - \varphi(x)$ является функцией от оператора дифференцирования.

11. Найти явно оператор $f(A) = e^{aA^2}$, $a > 0$, $A = d/dx$ в $L^2(\mathbb{R}, dx)$ с областью определения $D(A) = \{\varphi \in L^2(\mathbb{R}, dx), \varphi' \in L^2(\mathbb{R}, dx)$.

12. Пусть оператор A в $L^2(\mathbb{R}, dx)$ совпадает с id/dx на области определения $D(A) = \{\varphi \in L^2(\mathbb{R}, dx), \varphi' \in L^2(\mathbb{R}, dx)\}$. Вычислить явно $f(A)$, если
   - (a) $f(t) = e^{iat}$, $a \in \mathbb{R}$;
   - (b) $f(t) = \dfrac{\sin iat}{ia}$, $a \in \mathbb{R}$;
   - (a) $f(t) = \dfrac{1}{a^2+t^2}$, $a \in \mathbb{R}$.