Семинар 4

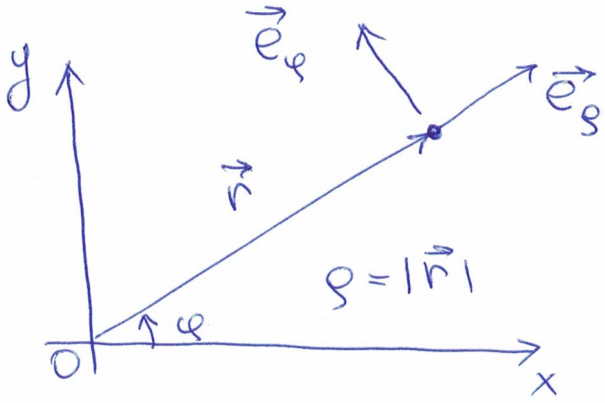
Криволинейные координаты: кинетическая энергия, работа, условия потенциальности сил

Как мы убедились в 4-й лекции, для описания механической системы нам необходимо знать её кинетическую и потенциальную энергии $T_{кин}$ и U тогда мы знаем её лагранжиан $L = T_{кин} - U$ и можем построить все уравнения движения – уравнения Эйлера-Лагранжа.

На семинаре потренируемся в вычислении этих величин в криволинейных координатах. Зачастую они удобней декартовых. И, естественно, потренируемся в определении и разрешении условий потенциальности силы в криволинейных координатах. Без этого не построить потенциальной энергии.

Рассмотрим подробно примеры полярных и сферических координат.

Полярные координаты в $\mathbb{R}^2$.



Эту систему координат мы уж детально разбирали в Лекции 1 (Пример 1, стр. 8) и в конце Семинара 1 (см. стр 19)

Для материальной точки с массой m и радиус-вектором $\vec{r}$ имеем:

$$\boxed{\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho \; ; \quad \dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi}$$

откуда вычисляем кинетическую энергию точки в полярных координатах:

$$(1) \quad \boxed{T_{кин} = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2} = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2\right)}$$

Для силы $\vec{F}$ с координатами (F_ρ, F_φ) в полярной системе, т.е.: $\boxed{\vec{F} = F_\rho \vec{e}_\rho + F_\varphi \vec{e}_\varphi}$

1-форма её работы на перемещении $d\vec{r}$

$$\boxed{d\vec{r} = d\rho\,\vec{e}_\rho + \rho\, d\varphi\,\vec{e}_\varphi} \quad \left(\text{сравните с } \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}\right)$$

имеет вид

$$(2) \quad \boxed{(\vec{F}, d\vec{r}) = F_\rho \cdot d\rho + F_\varphi \cdot \rho\, d\varphi}$$

Сила $\vec{F}$ потенциальна, если

$$(3) \quad \boxed{(\vec{F}, d\vec{r}) = -dU},$$

где $U = U(\rho, \varphi)$, а значит

$$(4) \quad \boxed{dU = \partial_\rho U \cdot d\rho + \partial_\varphi U \cdot d\varphi} \quad \left(\partial_\rho = \frac{\partial}{\partial \rho},\ \partial_\varphi = \frac{\partial}{\partial \varphi}\right.$$

частные производные по полярным координатам.

Сравнивая (2) и (4), получаем условия потенциальности силы в полярных координатах:

$$(5) \quad \boxed{F_\rho = -\partial_\rho U,\ \rho F_\varphi = -\partial_\varphi U}$$

Упомянем ещё один объект из дифференциальной геометрии, связывающий U и F – <u>градиент</u> $\vec{\nabla}$

По определению это вектор, компоненты которого являются дифференциальными операторами 1-го порядка, такой что

$$(6) \quad \boxed{dU = (\vec{\nabla} U, d\vec{r})}$$

для $\forall$ функции $U = U(\vec{r})$.

В декартовых координатах, очевидно, его компоненты имеют вид

$$\vec{\nabla} \equiv (\nabla_x, \nabla_y) = (\partial_x, \partial_y) \text{ – в } \mathbb{R}^2$$

Определим их в полярных координатах:

$$dU = (\vec{\nabla} U, d\vec{r}) = \nabla_\rho U \cdot d\rho + \nabla_\varphi U \cdot \rho\, d\varphi$$

$$\parallel$$

$$\partial_\rho U\, d\rho + \partial_\varphi U\, d\varphi,$$ откуда имеем:

$$(7)\quad \boxed{\vec{\nabla} = (\nabla_\rho, \nabla_\varphi) = \left(\partial_\rho, \frac{1}{\rho}\partial_\varphi\right)}$$

Из сравнения (3) и (6) имеем

$$(8)\quad \boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla} U}$$

что, очевидно согласуется с формулами (5) и (7)

Необходимое условие потенциальности силы $\vec{F}$ в полярных координатах имеет вид

$$(9)\quad \boxed{\partial_\varphi F_\rho = \partial_\rho(\rho F_\varphi)}$$

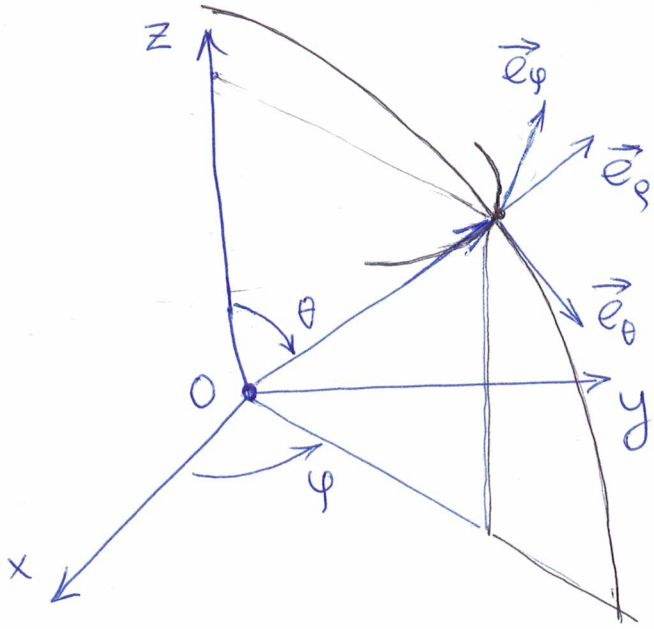
Это запись условия $\partial_\varphi \partial_\rho U = \partial_\rho \partial_\varphi U$, см. (5)

Этого, правда, недостаточно. Поскольку (ρ, φ) являются хорошими координатами на проколотой плоскости $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, для проверки потенциальности силы $\vec{F}$ достаточно в дополнение к (9) проверить

$$\boxed{\int_\sigma (\vec{F}, d\vec{r}) = 0,}$$

где σ — $\forall$ замкнутый контур, окружающий начало координат.

Сферические координаты в $\mathbb{R}^3$



Как разбирали в Лекции 1 (Пример 2, стр 9) и в Задании 1, №5

$$\vec{r} = r\vec{e}_r$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

Отсюда вычисляем кинетическую энергию точки массы m в сферических координатах

$$(10)\quad \boxed{T_{кин} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)}$$

Для силы $\vec{F} = F_r\vec{e}_r + F_\theta\vec{e}_\theta + F_\varphi\vec{e}_\varphi$

1-форма работы имеет вид

$$\boxed{(\vec{F}, d\vec{r}) = F_r\cdot dr + F_\theta\cdot r\,d\theta + F_\varphi\cdot r\sin\theta\,d\varphi}$$

Эта сила потенциальна, если найдется такой потенциал $U(r,\theta,\varphi)$:

$$(11)\quad \boxed{F_r = -\partial_r U;\ rF_\theta = -\partial_\theta U;\ r\sin\theta\,F_\varphi = -\partial_\varphi U}$$

Потенциальная сила выражается через градиент потенциала

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U, \quad \text{где} \quad \vec{\nabla} = (\nabla_r, \nabla_\theta, \nabla_\varphi) = \left(\partial_r, \frac{1}{r}\partial_\theta, \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\varphi\right) \tag{12}$$

Необходимые условия потенциальности $\vec{F}$ в сферических координатах:

$$\boxed{\begin{aligned} \partial_\theta F_r &= \partial_r (r F_\theta) && \text{следует из } \partial_\theta\partial_r U = \partial_r\partial_\theta U \\ \partial_\varphi F_r &= \partial_r (r\sin\theta F_\varphi) && \text{—"—} \quad \partial_\varphi\partial_r U = \partial_r\partial_\varphi U \\ \partial_\varphi (r F_\theta) &= \partial_\theta (r\sin\theta F_\varphi) && \text{—"—} \quad \partial_\varphi\partial_\theta U = \partial_\theta\partial_\varphi U \end{aligned}} \tag{13}$$

тут на r можно обе части равенства сократить.

Rem: Нетрудно заметить, что если сила $\vec{F}$ является вектором в пространстве размерности N, то число условий потенциальности для такой силы — $\frac{N(N-1)}{2}$.

Поскольку (r, θ, φ) — хорошие координаты в $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{Oz}\}$, для доказательства потенциальности $\vec{F}$, кроме (13), достаточно еще убедиться, что

$$\oint_{\circlearrowleft} (\vec{F}, d\vec{r}) = 0,$$

где $\circlearrowleft$ — $\forall$ замкнутый контур вокруг оси $\vec{Oz}$.

Пример 1 Компоненты силы $\vec{F}$ в $\mathbb{R}^3$ заданы в сферических координатах

$$\begin{cases} F_r = r^{\alpha+1} \sin\theta \, e^{\cos\varphi} \\ F_\theta = \cos(\alpha\theta) \, e^{\cos\varphi} \\ F_\varphi = -\sin\varphi \, e^{\cos\varphi} \end{cases}$$

а) Найти, при каком значении параметра α сила потенциальна; определить в этом случае отвечающий ей потенциал $U(r,\theta,\varphi)$.

<u>Решение</u>: Проверяем 3 условия потенциальности силы $\vec{F}$:

1) $\partial_\theta F_r = r^{\alpha+1} \cos\theta \, e^{\cos\varphi}$, $\partial_r (r F_\theta) = \cos(\alpha\theta) e^{\cos\varphi}$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\alpha = -1}$$

2) $\partial_\varphi F_r = r^{\alpha+1} \sin\theta (-\sin\varphi) e^{\cos\varphi}$

$\partial_r (r \sin\theta F_\varphi) = -\sin\theta \sin\varphi \, e^{\cos\varphi}$ $\Big) \Rightarrow \underline{\alpha = -1}$

3) $\partial_\varphi F_\theta = \cos(\alpha\theta)(-\sin\varphi) e^{\cos\varphi}$

$\partial_\theta (\sin\theta F_\varphi) = \cos\theta \left(-\sin\varphi \, e^{\cos\varphi}\right)$ $\Big) \Rightarrow \underline{\alpha = \pm 1}$ (т.к. cos – чётная функция)

Пересечение 3-х условий: $\boxed{\alpha = 1}$

Для случая $\alpha = 1$ потенциал U, отвечающий

силе $\vec{F}$ определим, поглядев внимательно на 1-форму работы:

$$-dU = (\vec{F}, dr) = F_r \cdot dr + F_\theta \cdot r d\theta + F_\varphi \cdot r\sin\theta\, d\varphi =$$

$$= \sin\theta\, e^{\cos\varphi} dr + r\cos\theta\, e^{\cos\varphi} d\theta - r\sin\theta \sin\varphi\, e^{\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= \sin\theta\, e^{\cos\varphi} dr + r\, e^{\cos\varphi} d(\sin\theta) + r\sin\theta\, d\left(e^{\cos\varphi}\right) =$$

$$= d\left(r\sin\theta\, e^{\cos\varphi}\right)$$

Следовательно U можно выбрать такое:

$$\boxed{U = -r\sin\theta\, e^{\cos\varphi}}$$

можно $\forall$ const добавить

Полученная функция U оказалась 2π-периодической по φ, а следовательно, работа силы $\vec{F}$ по $\forall$ замкнутому контуру вокруг оси $O\vec{z} = O$, то есть $\vec{F}$ действительно потенциальная сила.

Подсчёт работы потенциальной силы, если известен её потенциал — вещь нехитрая:

$$\int_\gamma (\vec{F} d\vec{r}) = \int_\gamma (-dU) = -U\Big|_A^B = U(A) - U(B)$$

Где γ — траектория с начальной точкой A и конечной — B.

Скажем, если для нашей силы $\vec{F}$ надо подсчитать работу, производимую ей при перемещении из $A=(0,0,0)$ в $B=(1,1,0)$, где мы указали декартовы координаты точек, то

$$A_{\vec{F}} = U(A) - U(B) = U\Big|_{r=0} - U\Big|_{\substack{r=\sqrt{2}\\ \theta=\pi/2\\ \varphi=\pi/4}} = \sqrt{2}\, e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Пример 2 Чтобы убедиться насколько ограничительны условия потенциальности, рассмотрим силу $\vec{F}$, заданную в сферических координатах:

$$\begin{cases} F_r = r^{\alpha} \sin\theta \; X(\varphi), \\ F_\theta = f(r) \cdot Y(\theta) \sin^2\varphi, \\ F_\varphi = Z(r,\varphi), \end{cases}$$

где α — некоторая константа, $X(\varphi)$, $Y(\theta)$, $f(r)$ — произвольные гладкие в $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\vec{z}\}$ функции, а про гладкую функцию $Z(r,\varphi)$ известно лишь, что при удалении вдоль оси $x=y$, $z=0$ от начала координат на бесконечность она ведёт себя асимптотически как $1/r^2$.

Спрашивается, при каких условиях на α, X, Y, Z, f сила $\vec{F}$ будет потенциальной? При всём изначальном произволе ответ будет единственным.

Решаем последовательно необходимые условия потенциальности:

1) $\partial_\theta F_r = \partial_r (r F_\theta)$

производная по r

$$(*) \quad r^\alpha \cos\theta \; X(\varphi) = (r f(r))' \; Y(\theta) \sin^2\varphi$$

Представляя это равенство в виде

$$r^{-\alpha} (r \cdot f(r))' = \frac{\cos\theta}{Y(\theta)} \cdot \frac{X(\varphi)}{\sin^2\varphi} = C_1$$

мы обнаруживаем, что C_1 должна быть константой, поскольку частная производная по θ и по φ от левого выражения в этом равенстве $= 0$, а частная производная по r от среднего выражения тоже $= 0$.

Рассуждая аналогично мы далее заключаем, что

$$\frac{\cos\theta}{Y(\theta)} = C_2^{-1}, \quad \frac{X(\varphi)}{\sin^2\varphi} = C_3,$$

где C_1 и C_2 – константы, причём $C_3 = C_1 \cdot C_2$.

Итак:

$$(r \cdot f(r))' = C_1 r^\alpha$$
$$Y(\theta) = C_2 \cos\theta$$
$$X(\varphi) = C_1 \cdot C_2 \sin^2\varphi$$

То, что произошло с уравнением (*), называется разделением переменных (r, θ и φ в нашем случае).

Решая получившийся диффур 1-го порядка на $f(r)$ имеем:

$$\boxed{f(r) = \frac{1}{r}\left(C_1 \frac{r^{\alpha+1}}{\alpha+1} + D \right)}, \text{ где}$$

D – еще одна константа – константа интегрирования.

2) Поскольку F_φ не зависит от θ, удобно теперь заняться условием $\partial_\varphi F_\theta = \partial_\theta (\sin\theta F_\varphi)$

$$f(r) Y(\theta) \sin 2\varphi = \cos\theta \, Z(r, \varphi)$$

Подставив сюда уже полученные на этапе 1) выражения для $Y(\theta)$ и $f(r)$, убеждаемся, что зависимость от θ в обеих частях равенства благополучно сокращается (а могла бы и не сократиться, что привело бы к противоречию). Имеем:

$$(**) \quad \boxed{\begin{aligned} Z(r,\varphi) &= C_2 f(r) \sin 2\varphi = \\ &= C_2 \left(C_1 \frac{r^\alpha}{\alpha+1} + \frac{D}{r} \right) \sin 2\varphi \end{aligned}}$$

3) Проверка третьего необходимого условия

$$\partial_\varphi F_r = \partial_r (r \sin\theta F_\varphi)$$

теперь является делом техники, но в

этом тоже <u>необходимо</u> убедиться.

Проверьте!

Наконец, асимптотическое условие на $Z(r,\varphi)$:

$$Z\Big|_{\varphi=\frac{\pi}{4}} \xrightarrow{r\to\infty} \frac{1}{r^2}$$

означает, что в формуле (**) для Z

$C_1 \cdot C_2 = -1$, $D = 0$, $\alpha = -2$.

В итоге:

$$\begin{cases} F_r = -r^{-2}\sin\theta\sin^2\varphi \\ F_\theta = r^{-2}\cos\theta\sin^2\varphi \\ F_\varphi = r^{-2}\sin 2\varphi \end{cases}$$

1-форма работы такой силы имеет вид

$$-dU = (\vec{F}d\vec{r}) = F_r dr + F_\theta \cdot r\,d\theta + F_\varphi r\sin\theta\, d\varphi =$$

$$= -\frac{1}{r^2}\sin\theta\sin^2\varphi\, dr + \frac{1}{r}\cos\theta\sin^2\varphi\, d\theta + \frac{1}{r}\sin\theta\sin 2\varphi\, d\varphi =$$

$$= \sin\theta\sin^2\varphi\, d\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\sin^2\varphi\, d(\sin\theta) + \frac{1}{r}\sin\theta\, d(\sin^2\varphi) =$$

$= d\left(\frac{1}{r}\sin\theta\sin^2\varphi\right)$, т.е. потенциал силы

$$\boxed{U = \frac{1}{r}\sin\theta\sin^2\varphi}$$

Это величина 2π-периодическая по φ, а значит $\vec{F}$ – <u>действительно потенциальна</u>