

Задание 4

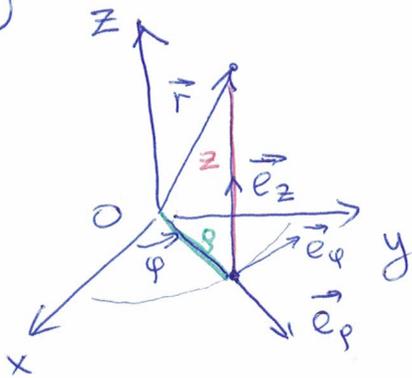
①

- ① Сила \vec{F} задана компонентами в сферических координатах

$$\begin{cases} F_r = -2r \cos \varphi \sin(2\theta) \\ F_\theta = -2r \cos \varphi (1 + \alpha \sin^2 \theta) \\ F_\varphi = -\alpha r \cos \theta \sin \varphi, \text{ где } \alpha - \text{параметр.} \end{cases}$$

Определите, при каких значениях α сила потенциальна. Найдите соответствующий потенциал

②



Для цилиндрической системы координат $\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z\}$ (см. рис.);

$$\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x},$$

- а) выпишите условия потенциальности силы (необходимые); напишите выражение для вектора градиента $\vec{\nabla}$;
- б) определите область в \mathbb{R}^3 , где цилиндрические координаты — "хорошие"; дополните необходимые условия потенциальности силы до необходимых и достаточных;
- в) напишите выражение для кинетической энергии материальной точки.

- ③ Сила \vec{F} задана в цилиндрических координатах

$$\begin{cases} F_\rho = \rho \cos \varphi \cdot X(z) \\ F_\varphi = \rho Y(\varphi) e^{-z^2} \\ F_z = V(\rho, \varphi) z e^{-z^2} \end{cases}, \text{ где } X, Y, V - \text{ неизвестные гладкие функции.} \quad (2)$$

При каких X, Y, V выполняются необходимые условия потенциальности \vec{F} ? (найти общее решение)

Определите потенциальную силу \vec{F} , если для неё заданы граничные условия

$$\vec{F}|_{\rho=0} = 0 \text{ (на оси } O\vec{z}), \quad F_\rho|_{\varphi=z=0} = \rho \text{ (на оси } O\vec{x})$$

Постройте соответствующий потенциал и проверьте достаточные условия потенциальности \vec{F} .

④ В цилиндрических координатах компонент F_φ потенциальной силы \vec{F} имеет вид

$$F_\varphi = f(\rho, z) \cos \varphi, \text{ где}$$

$f(\rho, z)$ - гладкая функция. Определите наиболее общий возможный вид остальных компонент силы \vec{F} и выпишите соответствующий потенциал

⑤* Тангенциальное силовое поле на $\mathbb{R}^3 \setminus \{Oz\}$ в сферических координатах имеет вид $\vec{F} = (0, F_\theta, F_\varphi)$, то есть оно ортогонально радиус-вектору \vec{r} .

- а) Приведите пример тангенциального поля, которое потенциально. Найдите общий вид потенциальной тангенциальной силы.
- б) Существует ли потенциальное тангенциальное поле, которое на экваторе, то есть при $\theta = \pi/2$, имеет компоненту $F_\varphi(r) \neq 0$, не зависящую от φ ?