Усеченные идеальные треугольники (и не только) и некоторые их свойства

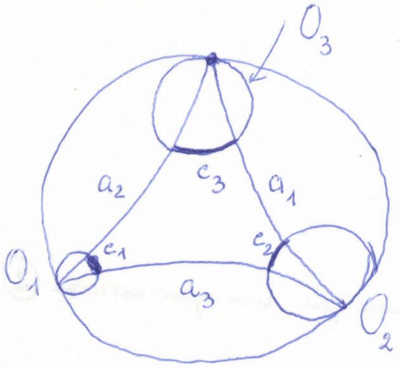
Цикл 3.

Задача 1. Найдите группу симметрий идеального треугольника

Задача 2. На стороне идеального треугольника выбрана точка P и из нее опущены перпендикуляры на две другие стороны треугольника. Основание перпендикуляров обозначим через R и S. Найти угол RPS.

- Усеченный идеальный треугольник — это (идеальный треугольник + орициклы в каждой его вершине)

Внимание на рисунок:



a_1, a_2, a_3 — (направленные) расстояния между орициклами

c_1, c_2, c_3 — длины (гиперболические) дуг орициклов, высекаемых на них сторонами треугольника.

Итак, $a_i = d(O_j O_k)$, где $(i\,j\,k)$ перестановка $(1\,2\,3)$

Удобно ввести вместо координат a_1, a_2, a_3 координаты $\Lambda_i = e^{\frac{1}{2}a_i}$. Новые координаты назовем <u>весами</u>.

Задача 3. Докажите, что любая тройка $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ (или любая тройка $(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) \in \mathbb{R}^3_+$) определяет единственный с точностью до движения усеченный идеальный треугольник.

Задача 4. Докажите, что $c_k = \dfrac{\Lambda_k}{\Lambda_i \Lambda_j} = e^{\frac{1}{2}(-a_i - a_j + a_k)}$

- Рассмотрим теперь усеченный идеальный четырехугольник.

Внимание на рисунок.

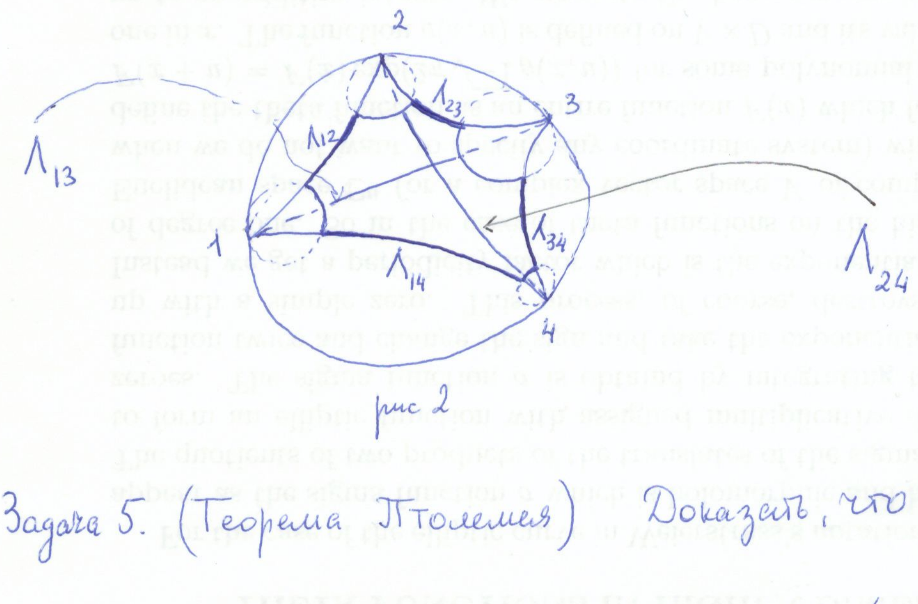


рис 2

Задача 5. (Теорема Птолемея) Доказать, что

$$\Lambda_{13}\Lambda_{24} = \Lambda_{23}\Lambda_{14} + \Lambda_{12}\Lambda_{34} \qquad (*)$$

Задача 6. Верно ли, что для любых шести положительных чисел, удовлетворяющих уравнению $(*)$, существует идеальный усеченный четырехугольник с выбранными весами?