Лекция 5

Напомню, что нам известно о строении тэта-фактора автоморфности $\Theta(z,l)$. Как было доказано, $\Theta(z,l) = e\left(Q_l(z) + c_l\right)$, где $2i\,Q_l(z)$ равно значению некоторой квазиэрмитовой формы $Q(z,w)$ на паре (z,l). Запишем квазиэрмитову форму в виде $Q = H + S$ с эрмитовой формой H и симметрической формой S (такая запись однозначна). Тогда кососимметрическая форма $A = \operatorname{Im} H$ принимает целые значения на решетке L. Что касается констант c_l, то про них известно, что

$$c_{l_1+l_2} \equiv c_{l_1} + c_{l_2} + Q_{l_1}(l_2) \pmod{\mathbb{Z}}$$

• А теперь продолжим приведение тэта-фактора к каноническому виду. С этой целью рассмотрим величины

$$b_l = c_l - \tfrac{1}{4i} Q(l,l), \quad l \in L$$

Лемма 5.1. Комплексные числа $\{b_l\}$, $l \in L$, удовлетворяют условию

$$b_{l_1+l_2} \equiv b_{l_1} + b_{l_2} + \frac{1}{2} A(l_1,l_2) \pmod{\mathbb{Z}} \qquad (**)$$

Доказательство.

$\square$ $b_{l_1+l_2} = c_{l_1+l_2} - \frac{1}{4i} Q(l_1+l_2, l_1+l_2) \equiv c_{l_1} + c_{l_2} - \tfrac{1}{4i} Q(l_1) - \tfrac{1}{4i} Q(l_2) -$

$- \tfrac{1}{4i} Q(l_1,l_2) - \tfrac{1}{4i} Q(l_2,l_1) + Q_{l_1}(l_2) \equiv b_{l_1} + b_{l_2} - \tfrac{1}{4i}\left(Q(l_1,l_2) + Q(l_2,l_1) - 2Q(l_1,l_2\right.$

$$\equiv b_{l_1}+b_{l_2}-\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2i}\Big(Q(l_1,l_2)-Q(l_2,l_1)\Big)\right\}\equiv b_{l_1}+b_{l_2}-\tfrac{1}{2}A(l_1,l_2)\equiv$$

$$\equiv b_{l_1}+b_{l_2}+\frac{1}{2}A(l_1,l_2)\ (\mathrm{mod}\ \mathbb{Z})\ \square$$

Следствие. Числа $\varphi(l)=e(b_l)$ удовлетворяют уравнению квазихарактера относительно кососимметрической формы A:

$$\varphi(l_1+l_2)=\varphi(l_1)\cdot\varphi(l_2)\,e^{\pi i A(l_1,l_2)} \qquad (***)$$

Замечание. а) Если $A(L\times L)\subset 2\mathbb{Z}$, то квазихарактер становится настоящим характером $\varphi: L\longrightarrow\mathbb{C}^*$, $\varphi(l_1+l_2)=\varphi(l_1)\varphi(l_2)$.

б). Отношение двух квазихарактеров решетки L (относительно одной и той же формы) является характером решетки L.

Лемма 5.2. Для любого квазихарактера φ решетки L относительно кососимметрической формы A (целочисленной на решетке) существует такая $\mathbb{C}$-линейная функция $m(z)$ что квазихарактер $\tilde{\varphi}=\varphi(l)e(-m(l))$ принимает на пространстве V на решетке L значения, равные по модулю единице. Такая $\mathbb{C}$-линейная функция $m(z)$ однозначно определяется квазихарактером.

Задача 5.1. Докажите лемму 5.2.

С учетом лемм 5.1 и 5.2 приходим к следующему важному утверждению:

Теорема 5.1 • Пусть $\Theta_\ell(z)$ – тэта-фактор автоморфности.

Тогда существуют такие квазиэрмитова форма $Q(z,w)$ на $V\times V$, $\mathbb{C}$-линейная форма m на V и квазихарактер φ решетки L относительно формы $A = \operatorname{Im} H = \frac{1}{2i}\left(Q(z,w)-Q(w,z)\right)$, принимающий значения в множестве $\{z\in\mathbb{C} \mid |z|=1\}$, что

$$\Theta_\ell(z) = e\left(\frac{1}{2i}Q(z,\ell)+\frac{1}{4i}Q(\ell,\ell)+m(\ell)\right)\cdot\varphi(\ell) \qquad (***)$$

•• При этом тройка (Q, m, φ) однозначно определяется фактором автоморфности $\Theta_\ell(z)$

••• Задача 5.2. Докажите единственность тройки.

Окончание доказательства теоремы 4.1.

Теперь мы можем спокойно доказать п. в) в теореме 4.1, а именно, докажем, что $H\geq 0$. Предварительно изучим одну простую операцию нормализации тэта-функции (или тэта-фактора автоморфности).

• Операция нормализации.

Пусть задан фактор автоморфности $a(\ell,z)$, с тройкой (Q, m, φ) (см. $***$) и пусть $\Theta(z)$ ненулевая тэта-функция, ~~меняю~~ которая меняется при сдвигах на векторы решетки L с фактором $a(\ell,z)$, т.е. $\Theta(z+\ell) = a(z,\ell)\,\Theta(z)$.

Рассмотрим тривиальную (обратимую) тэта-функцию

$$\Theta_0 = e\left(\tfrac{1}{4i}S(z,z)+m(z)\right) \quad (\text{напомню, что } Q = H+S)$$

Тогда, как легко проверить, нормализованная тэта-функция $\tilde{\Theta} = \Theta \, \Theta_0^{-1}$ будет меняться при сдвигах с фактором автоморфности, который определяется тройкой $(H, 0, \varphi)$

Задача 5.3. Проверьте!

Лемма 5.4.

Рассмотрим функцию $|\tilde{\Theta}| \cdot e^{-\frac{\pi}{2} H(z,z)}$. Эта функция является непрерывной на V и инвариантной относительно сдвигов на векторы решетки L. Для модуля $|\tilde{\Theta}|$ верна оценка

$$|\tilde{\Theta}| < \mathrm{Const}\, e^{\frac{\pi}{2} H(z,z)}.$$

Задача 5.4. Докажите лемму 5.4.

Допустим теперь, что $H(z_0, z_0) < 0$. Заметим, что $H(z+\lambda z_0, z+\lambda z_0) = H(z_0, z_0)|\lambda|^2 + O(\lambda)$ при произвольном фиксированном z и $|\lambda| \to \infty$. Кроме того, функция $\tilde{\Theta}(z+\lambda z_0)$ голоморфна по λ и стремится к нулю при $|\lambda| \to \infty$ (лемма 5.4). Следовательно, $\tilde{\Theta}(z) = 0$ для любого $z \in V$ (почему?)

Но это противоречит тому, что $\Theta(z)$ предполагалась ненулевой тэта-функцией.

<u>Главный вывод</u>. При изучении пространства тэта-функций, меняющихся с тэта-фактором автоморфности типа (Q, m, φ) можно (после нормализации) рассматривать пространство тэта-функций, меняющихся по правилу

$$\Theta(z+l) = e^{\frac{\pi}{2} H(l,l) + \pi H(z,l)} \cdot \varphi(l)\, \Theta(z),$$

где H - эрмитова форма, мнимая часть которой $\mathrm{Im}\, H$ принимает целые значения на решетке L и $H \geq 0$.

• В дальнейшем, чтобы не мешали мелкие технические детали, мы будем считать, что $H > 0$. В этом случае определитель кососимметрической формы $A = \operatorname{Im} H$ отличен от нуля.

Таким образом, наша ближайшая цель — это изучить пространство тэта-функций для пары Римана (V, L). Обозначим это пространство буквой $\mathcal{L}(H, 0, \varphi)$ с указанием в скобках типа фактора автоморфности (фактически от тройки мы плавно перешли к двойке).

Замечание. Если не беспокоиться о существовании нетривиальных голоморфных сечений (= тэта-функций, отличных от нуля), то, фактически, мы доказали, что классы изоморфных линейных голоморфных расслоений на комплексном торе нумеруются парами (H, φ), H — эрмитова форма, $\operatorname{Im} H(L \times L) \subset \mathbb{Z}$, $\varphi(l_1 + l_2) = \varphi(l_1)\varphi(l_2) \cdot e^{\pi i \operatorname{Im} H(l_1, l_2)}$, $|\varphi(l)| = 1$.

Сечения появляются, если $H \geq 0$, а при $H > 0$ расслоение $(3H, 3\varphi)$ обильно (Теорема Лефшеца, доказанная в учебнике И. Р. Шафаревича)