Задачи к семинару 13 на 08.05.20

Задача 1. Мы уже нашли подгруппу n-кручения G_n аддитивной абелевой группы G точек на неособой кубике над полем $\mathbb{C}$ для $n = 2,\ 3,\ 4$. А именно, $G_n \simeq \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n,\ n \leqslant 4$. Опишите группу G_n для $n = 2^m,\ m \geqslant 3$.

Задача 2. Загадка: найдите пример топологической аддитивной группы G, содержащей в качестве подгруппы m-кручения группу $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m$.

Задача 3. Как мы видели, девять точек перегиба неособой кубики являются примером конфиграции, абстрактное определение которой звучит примерно так. Это конечное множество и некоторый набор его трехэлементных подмножеств, называемых прямыми, таких что через любые две точки проходит единственная прямая. Мы выяснили, что любая такая конфигурация должна состоять из нечетного числа точек $(2n+1)$, через каждую точку проходит n прямых, а общее число прямых равно $\frac{n(2n+1)}{3}$, откуда следует, что остаток от деления числа n на 3 не должен быть двойкой. Тем самым число точек в такой конфигурации может быть только $3,\ 7,\ 9,\ 13,\ 15,\ldots$. Мы знаем геометрическую конструкцию таких конфигурация для $3,\ 7,\ 9$: для 7 это проективная плоскость над полем из 2 элементов, а для 9 — аффинная плоскость над полем из трех элементов. (Для 9 мы даже доказали единственность!). Нетрудно объяснить 15: это трехмерное проективное пространство над полем из двух элементов. Предлагается подумать, существует ли такая конфигурация для 13, особенно интересно было бы придумать для нее какую-то геометрическую конструкцию.

Задача 4. Сизигическим пучком кубик называется пучок кубик $\mathbb{CP}^2$, содержащий гладкую кубику X и ее гессиан $H(X)$. Примером сизигического пучка является является пучок

$$\{x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + ax_0x_1x_2 = 0 \mid a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}\}, \tag{1}$$

для которого $X = \{x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 = 0\}$ – кубика Ферма, а гессиан $H(X) = \{x_0x_1x_2 = 0\}$ - тройка прямых. Сколько в этом пучке имеется особых кубик?

Задача 5. Докажите, что гессиан неособой кубики кубики, отличной от кубики Ферма, неособ, а у кубики Ферма он распадается на 3 прямые.

Задача 6. Пусть X - произвольная гладкая кубика в пучке сизигических кубик, и пусть a - какая-либо из базисных точек пучка. Как мы знаем, a является точкой перегиба для X, и пусть $l = \mathbb{T}_a X$.
(i) Докажите, что в этом сизигическом пучке имеется единственная кубика Y, касающаяся прямой l в некоторой точке $b \neq a$.
(ii) Докажите, что $Y = H(X)$ - гессиан кубики X.

Задача 7. Рассмотрим пучок кубик, заданных в вейерштрассовой форме в виде:

$$\{y^2 = x(x-1)(x-\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}\}$$

Пусть X_λ, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ – произвольная гладкая кубика этого пучка. Сколько имеется в этом пучке кубик, изоморфных X_λ?

Задача 8. Пусть X_a – произвольная гладкая кубика сизигического пучка (1). Сколько имеется в этом пучке кубик, изоморфных X_a?