

Задачи к семинару 14 на 15.05.20

Задача 1. Как мы уже знаем, существует конфигурация, называемая конфигурацией Штейнера, из 13 точек (и 26 прямых) такая, что (а) через каждые 2 точки проходит единственная прямая и (б) на каждой прямой лежат по 3 точки. Существует ли другая конфигурация из 13 точек и N прямых, с теми же свойствами (а) и (б)? Если да, то найдите число N .

Задача 2. Рассмотрим пучок кубик, заданных в вейерштрассовой форме в виде:

$$\{y^2 = x(x-1)(x-\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}\}$$

Пусть X_λ , $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ – произвольная гладкая кубика этого пучка. Сколько имеется в этом пучке кубик, изоморфных X_λ ?

Задача 3. Пусть X_a – произвольная гладкая кубика сизигического пучка кубик:

$$\{x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + ax_0x_1x_2 = 0 \mid a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}\}.$$

Сколько имеется в этом пучке кубик, изоморфных X_a ?

Задача 4. Разложите многочлен $x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + 3x_0x_1x_2$ на линейные множители.

Задача 5. Пусть X – произвольная гладкая кубика сизигического пучка кубик, и пусть a – какая-либо из базисных точек пучка. Как мы знаем, a является точкой перегиба для X , и пусть $l = T_a X$.

(i) Докажите, что в этом сизигическом пучке имеется единственная кубика Y , касающаяся прямой l в некоторой точке $b \neq a$.

(ii) Докажите, что $Y = H(X)$ – гессиан кубики X .

Задача 6. Пусть $(x : y)$ – проективные координаты в \mathbb{P}^1 , и пусть $\overline{W} = W_{2,3}$ – пространство кубических форм от двух переменных x, y . Как мы видели, всякое подпространство W в \overline{W} задает отображение

$$f_W : \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}(W^*),$$

называемое *отображением линейным рядом* $\mathbb{P}(W)$. Пусть

$$W = \{F \in \overline{W} \mid F(a) = 0\},$$

где a – фиксированная точка в \mathbb{P}^1 . Найдите образ отображения f_W .

Задача 7. В обозначениях предыдущей задачи пусть

$$W = \{F \in \overline{W} \mid F(a) = F(b)\},$$

где a и b – фиксированные точки в \mathbb{P}^1 . Найдите образ отображения f_W .

Задача 8. В обозначениях задачи 6 пусть

$$W = \{F \in \overline{W} \mid \frac{\partial F}{\partial x}(a) = 0\},$$

где a – фиксированная точка в \mathbb{P}^1 . Найдите образ отображения f_W .