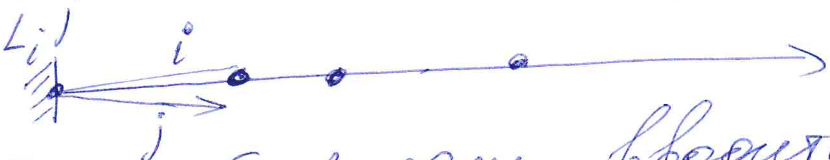
Группы Кос, R-матрицы и квантовые группы

II Алгебра уравнения отражений.

Английское название — Reflection Equation Algebra (REA). Термин происходит из физической модели — взаимодействующие частицы на ~~прямой~~ полупрямой:



В этой модели вводится матрица отражений: L_i^j, описывающая изменение характеристик частиц при отражении от границы конфигурационного пространства — точки $x=0$. Частицы имеют некоторую характеристику (внутреннее "квантовое число"), которая может принимать N дискретных значений $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Если к границе $x=0$ подлетает частица со значением характеристики i, то после отражения это значение может измениться на некоторое j. L_i^j описывает вероятность этого изменения.

В 1984 г. Иван Чередник установил, что если L_i^j не произвольны, а удовлетворяют некоторому квадратичному соотношению, то модель $\exists$ частиц с отражением на границе будет вполне интегрируемой. Эти квадратичные соотношения были названы "уравнениями отражения". В упрощённом виде они выглядят так:

$$R^{a_1 a_2}_{i_1 i_2} L^{b_1}_{a_1} R^{c_1 j_2}_{b_1 a_2} L^{j_1}_{c_1} =$$

$$= L^{a_1}_{i_1} R^{b_1 a_2}_{a_1 i_2} L^{c_1}_{b_1} R^{j_1 j_2}_{c_1 a_2}$$

Здесь по a, b и c идёт суммирование от 1 до n, индексы i_1, i_2, j_1 и j_2 – свободны. Вводя матрицу $L = \|L_i^j\|$, $L_1 = L \otimes \mathbb{1}$, перепишем уравнение отражений в виде:

$$\boxed{R_{12} L_1 R_{12} L_1 = L_1 R_{12} L_1 R_{12}} \quad (9)$$

Это знакомое нам равенство,

задающие перестановочные соотношения между генераторами L_i^j ассоциативной алгебры $\mathcal{L}_q(R)$, которая есть квантование коммутативной алгебры $Fun(Mat_n^*)$ со скобкой Семёнова-Тянь-Шанского. Эту алгебру будем называть <u>алгеброй уравнения отражений</u>. (REA).

Дальше мы будем считать R — R-матрицей $GL(n)$ типа (т.е., R удовлетворяет соотношению Кое, условию Гекке и является строго кособратимой).

Для $n=2$, $L=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $R=\begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}$

$\lambda = q - q^{-1}$,

легко получить явный вид перест. соотношений:

$$a\cdot b = \frac{1}{q^2} b\cdot a \qquad [b,c] \equiv b\cdot c - c\cdot b = \frac{\lambda}{q} a\cdot(d-a)$$

$$a\cdot c = q^2 c\cdot a \qquad [c,d] = \frac{\lambda}{q} c\cdot a$$

$$a\cdot d = d\cdot a \qquad [d,b] = \frac{\lambda}{q} a\cdot b$$

Представляя $q = e^{\nu}$, и устремляя $\nu \to 0$ в первом порядке по ν получается скобка Семёнова-Тянь-Шанского на $\mathrm{Fun}(Mat_2^*)$ (см. задачу 6 из 4-го листка).

Произведём линейный сдвиг генераторов, лежащих на диагонали матрицы L_i^j, т.е. перейдём к генераторам K_i^j по формулам:

$$L_i^{\ j} = \hbar \, \delta_i^{\ j} \, e_{\mathcal{L}} - \lambda K_i^{\ j}$$

единица RFA

или в матричном виде:

$$L = \hbar \, \mathbb{I} \, e_{\mathcal{L}} - \lambda K$$

Подставив это в формулу (9) и учитывая условие Гекке $R^2 = \mathbb{I} + \lambda R$, получим для генераторов K квадратично-линейные соотношения:

$$\boxed{R_{12} K_1 R_{12} K_1 - K_1 R_{12} K_1 R_{12} = \hbar \left(R_{12} K_1 - K_1 R_{12} \right) \qquad (10).}$$

Соответствующая 2х пара-метрическая алгебра $\mathcal{L}_{q,\hbar}(R)$ изоморфна алгебре уравнения отражений $\mathcal{L}_q(R)$, но эти алгебры имеют разный предел при $q\to 1$. Алгебра $\mathcal{L}_q(R)$ переходит в коммутативную алгебру функций $\mathrm{Fun}(\mathrm{Mat}_N^*)$, а $\mathcal{L}_{q,\hbar}$ — переходит в Универсальную обёртывающую алгебру $U(gl_\hbar(N))$ (мы считаем, что $R \xrightarrow[q\to 1]{} P$):

$$P_{12}K_1P_{12}K_1 - K_1P_{12}K_1P_{12} = \hbar(P_{12}K_1 - K_1P_{12})$$

Эта алгебра, как мы видели, является квантованием алгебры $\mathrm{Fun}(\mathrm{Mat}_N^*)$ относительно $gl(N)$-скобки Пуассона-Ли. Поэтому алгебра $\mathcal{L}_{q,\hbar}(R)$ есть квантование алгебры функций $\mathrm{Fun}(\mathrm{Mat}_N^*)$ относительно пучка скобок Пуассона $\alpha\{\,,\,\}_{STS} + \beta\{\,,\,\}_{PL}$,

$$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

где $\{,\}_{STS}$ — скобка Семенова-Тянь-Шанского, а $\{,\}_{PL}$ — скобка Пуассона-Ли. Эти скобки <u>согласованы</u> в том смысле, что линейная комбинация

$$\{,\}_{\alpha,\beta} = \alpha\cdot\{,\}_{STS} + \beta\{,\}_{PL}$$

есть скобка Пуассона при <u>любых</u> α и β. Самое нетривиальное, естественно, — проверить тождество Якоби для скобки $\{,\}_{\alpha,\beta}$.

$\boxed{О}$ Квадратично-линейная алгебра $\mathcal{L}_{q,\hbar}(R)$ называется модифицированной алгеброй уравнения отражений (modified REA).

—————— u ——————

Рассмотрим теперь некоторые свойства REA $\mathcal{L}_q(R)$. Прежде всего, в отличие от RTT-алгебры, REA $\mathcal{L}_q(R)$ обладает большим центром.

$\boxed{У}$ Элементы $p_k(L) = Tr_R(L^k)$ принадлежат центру REA $\mathcal{L}_q(R)$ при $\forall k \geq 1$.

$\boxed{Зам}$ Обратите внимание на простую структуру матричной степени L^k: $L^k = \underbrace{L\cdot L\cdot\ldots\cdot L}_{k\ раз}$ — как у классических матриц, в отличие от RTT-алгебры, где $p_k(T) = Tr_{(1\ldots k)}(T_1T_2\ldots T_k R_{k-1}\ldots R_2)$.

Доказательство:

В $\mathcal{L}_q(R)$ справедливо (9):

$$R_{12} L_1 R_{12} L_1 = L_1 R_{12} L_1 R_2 .$$

Умножим матрично слева на L_1

$$\underbrace{L_1 R_{12} L_1 R_2}_{\substack{\parallel \\ R_{12} L_1 R_{12} L_1 \text{ по (9)}}} L_1 = L_1^2 R_{12} L_1 R_{12} \Rightarrow$$

$$R_{12} L_1 R_{12} L_1^2 = L_1^2 R_{12} L_1 R_{12}$$

Дальше по индукции получим

$$R_{12} L_1 R_{12} L_1^k = L_1^k R_{12} L_1 R_{12} . \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Умножим это равенство слева и справа на R_{12}^{-1}:

$$L_1 R_{12} L_1^k R_{12}^{-1} = R_{12}^{-1} L_1^k R_{12} L_1$$

и возьмём R-след по 2-му пространству. При этом учтем $Tr_{R(2)} R_{12}^{\pm 1} X_1 R_{12}^{\mp 1} = \mathbb{1}_1 Tr_R(X) \ \forall X$

в результате получим:

$$L_1 Tr_R(L^k) = Tr_R(L^k) L_1 ,$$

или в компонентах: $L_i^j p_k(L) = p_k(L) L_i^j \Rightarrow$

полиномы $p_k(L) = Tr_R(L^k)$ коммутируют со всеми генераторами алгебры $\mathcal{L}_q(R)$ => лежат в её центре. ■

Таким образом, центр $\mathcal{L}_q(R)$ в отличие от RTT-алгебры — большой. Элементы $p_k(L)$ отличны от 0 при $\forall k$, но только N из них: $p_1, p_2, \dots, p_N$ алгебраически <u>независимы</u> в силу тождества Гамильтона-Кэли на матрицу L.

Часто удобнее работать с другой системой алгебраически независимых центральных элементов — аналогов элементарных симметрических функций:

$$\boxed{10} \quad \sigma_k(L) = Tr_{R(1\dots k)}\left(A^{(k)}_{1\dots k} L_{\bar{1}} L_{\bar{2}} \dots L_{\bar{k}}\right).$$

Здесь введены важные обозначения:

$$L_{\bar{1}} \equiv L_1 = L \otimes \underbrace{\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes \dots \otimes \mathbb{1}}$$

дальше одни $\mathbb{1}$ — сколько нужно по смыслу задачи.

$$L_{\bar{2}} = R_{12} L_1 R_{12}^{-1}$$

$$\vdots$$

$$L_{\bar{k}} = R_{k-1} L_{\overline{k-1}} R_{k-1}^{-1}$$

$\boxed{\text{Зам.}}$ Если $R \to P$ то $L_{\bar{i}}$ превращаются в обычные тензорные копии $L_{\bar{2}} \to P_{12} L_1 P_{12} = L_2 = \mathbb{1} \otimes L$ и т. п.

$\boxed{\text{У}}$ Определяющее соотношение (9) можно переписать в виде, похожем на соотношение в RTT-алгебре:

$$R_{12} L_1 R_{12} L_1 = L_1 R_{12} L_1 R_{12} \Longleftrightarrow R_{12} L_{\bar{1}} L_{\bar{2}} = L_{\bar{1}} L_{\bar{2}} R_{12}$$

Доказательство получается немедленно подстановкой определений для $L_{\bar{1}}$ и $L_{\bar{2}}$.

$\boxed{\text{У}}$ $\boxed{R_i L_{\bar{j}} = L_{\bar{j}} R_i}$ $\forall\ i \neq j,\ i \neq j-1.$ $\boxed{(11)}$

<u>Доказательство:</u>

Если $i \geq j+1$, то R_i коммутирует с $L_{\bar{j}}$ потому что эти объекты "живут" в <u>разных</u> матричных пространствах:

$$R_i L_{\bar j} = R_i \left(R_{j-1} \dots R_1 L_1 R_1^{-1} \dots R_{j-1}^{-1}\right) =$$
$$= \left(R_{j-1} \dots R_1 L_1 R_1^{-1} \dots R_{j-1}^{-1}\right) R_i$$

Пусть теперь $i < j-1$:

$$R_i L_{\bar j} = R_i R_{j-1} \dots R_{i+1} R_i R_{i-1} \dots R_1 L_1 R_1^{-1} \dots R_{j-1}^{-1} =$$
$$= R_{j-1} \dots \underbrace{R_i R_{i+1} R_i}_{\text{Соотн. кос}} R_{i-1} \dots R_1 L_1 R_1^{-1} \dots R_{j-1}^{-1} =$$
$$= R_{j-1} \dots R_{i+1} R_i R_{i+1} R_{i-1} \dots R_1 L_1 R_1^{-1} \dots R_{j-1}^{-1} =$$
$$= R_{j-1} \dots R_1 L_1 R_1^{-1} \dots \underbrace{R_{i+1} R_i^{-1} R_{i+1}^{-1}}_{\text{Соотн. кос}} \dots R_{j-1}^{-1} =$$
$$= (R_{j-1} \dots R_1) L_1 R_1^{-1} \dots R_i^{-1} R_{i+1}^{-1} R_i R_{i+2} \dots R_{j-1}^{-1} =$$
$$= L_{\bar j} R_i$$

У !

Перестановочные соотношения в $\mathcal{L}_1(R)$ можно записать в виде:

$$\boxed{R_k L_{\bar k} L_{\overline{k+1}} = L_{\bar k} L_{\overline{k+1}} R_k} \quad \forall k \in \mathbb{N} \qquad (12)$$

Доказательство!

Проведём индукцией по k.

База: При $k=1$ $R_1 L_{\bar 1} L_{\bar 2} = L_{\bar 1} L_{\bar 2} R_1$ — выполнено.

Пусть выполнено для всех $k \le p-1$.

Докажем для $k=p$: $R_p L_{\bar p} L_{\overline{p+1}} = L_{\bar p} L_{\overline{p+1}} R_p$.

Преобразуем $L_{\bar p} L_{\overline{p+1}}$ с учётом определения $L_{\bar p}$ и формулы (11):

$$\underline{\underline{L_{\bar p} L_{\overline{p+1}}}} \equiv \big(\underbrace{R_{p-1} L_{\overline{p-1}} R_{p-1}^{-1}}_{L_{\bar p}}\big)\big(\underbrace{R_p R_{p-1} L_{\overline{p-1}} R_{p-1}^{-1} R_p^{-1}}_{L_{\overline{p+1}}}\big) =$$

$$= \{ R_{p-1}^{-1} R_p R_{p-1} = R_p R_{p-1} R_p^{-1} \text{ — соотн. кос} \} =$$

$$= R_{p-1} L_{\overline{p-1}} R_p R_{p-1} R_p^{-1} L_{\overline{p-1}} R_{p-1}^{-1} R_p^{-1} =$$

по формуле (11)

$$= R_{p-1} R_p \left(L_{\overline{p-1}} R_{p-1} L_{\overline{p-1}} \right) \underbrace{R_p^{-1} R_{p-1}^{-1} R_p^{-1}}_{\text{соотн. кос}} =$$

$$= R_{p-1} R_p \big(L_{\overline{p-1}} \underbrace{R_{p-1} L_{\overline{p-1}} R_{p-1}^{-1}}_{L_{\bar p}} \big) R_p^{-1} R_{p-1}^{-1} =$$

$$= \underline{\underline{R_{p-1} R_p \left(L_{\overline{p-1}} L_{\bar p} \right) R_p^{-1} R_{p-1}^{-1}}}.$$

Теперь получаем:

$$\underline{R_p L_{\bar p} L_{\overline{p+1}}} = \underbrace{R_p R_{p-1} R_p}_{\text{Соотн. кос}} (L_{\overline{p-1}} L_{\bar p}) R_p^{-1} R_{p-1}^{-1} =$$

$$= R_{p-1} R_p \big(\underbrace{R_{p-1} L_{\overline{p-1}} L_{\bar p}}_{\text{предположение индукции}}\big) R_p^{-1} R_{p-1}^{-1} =$$

$$= R_{p-1} R_p \big(L_{\overline{p-1}} L_{\bar p} \underbrace{R_{p-1}\big) R_p^{-1} R_{p-1}^{-1}}_{\text{Соотн. кос}} =$$

$$= \underbrace{R_{p-1} R_p (L_{\overline{p-1}} L_{\bar p}) R_p^{-1} R_{p-1}^{-1}} R_p = \underline{L_{\bar p} L_{\overline{p+1}} R_p} \ \blacksquare.$$

$\boxed{\text{Следствие}\ !}$

$$A^{(k)}_{12\dots k} L_{\bar 1} L_{\bar 2} \dots L_{\bar k} = L_{\bar 1} L_{\bar 2} \dots L_{\bar k} A^{(k)}_{1\dots k}.$$

Док-во: $A^{k}_{12\dots k}$ — полином по $R_1, \dots, R_{k-1}$, а в силу доказанного утверждения

$$R_i L_{\bar 1} \dots L_{\bar k} = L_{\bar 1} \dots L_{\bar k} R_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, k-1.$$

Вместо антисимметризатора $A^{(k)}$ можно оставить любой идемпотент P отвечающий $H_k(q)$ и вообще, любой поликами от $R_1, \dots, R_{\underline{k-1}}$. ∎

Вернемся теперь к определению σ_k.

$\boxed{V}$ Элементы $\sigma_i(L)$ связаны с элементами $p_k(L) = Tr_R(L^k)$ квантовыми аналогами соотношений Ньютона:

$$k_q \sigma_k(L) - q^{k-1} p_1 \sigma_{k-1} + q^{k-2} p_2 \sigma_{k-2} - \dots + (-1)^k p_k = 0$$

<u>Док-во:</u> Доказательство аналогично случаю RTT алгебры, только надо учесть 2 свойства, легко проверяемые по индукции:

$$Tr_{R(s+1,\dots s+k)}\left(A^{(k)}_{s+1\dots s+k} L_{\overline{s+1}} \dots L_{\overline{s+k}}\right) =$$

$$= \mathbb{1}_{12\dots s}\, \sigma_k(L).$$

$$Tr_{R(12\dots k)}\left(L_{\bar 1} L_{\bar 2}\dots L_{\bar k} R_{k-1}\dots R_2 R_1\right) = Tr_R(L^k)$$

Например:

$$Tr_{R(12)}\left(L_{\bar 1}L_{\bar 2}R_1\right) = Tr_{R(12)} L_1 \underbrace{\left(R_1 L_1 R_1^{-1}\right)}_{L_{\bar 2}} R_1 =$$

$$= Tr_{R(12)}\left(L_1 \underbrace{R_1}_{\Downarrow\, Tr_{R(2)} R_1 = 1} L_1\right) = Tr_{R(1)}\left(L_1^2\right).$$ ∎

В силу соотношений Ньютона, $\sigma_k(L)$ представляют собой <u>полиномы</u> от $p_1, \dots, p_k \Rightarrow \sigma_k$ — центральные элементы.
Из свойства $A^{(N+1)} = 0$ (R - $GL(N)$ R-матрица) сразу видим, что $\sigma_i(L)$ ровно N штук.

$\boxed{\text{О}}$ $\sigma_N(L) \sim \det_R L$ — квантовый детерминант матрицы L.

$\boxed{\text{У}}$ Матрица генераторов REA $\mathcal{L}_q(R)$ удовлетворяет матричному тождеству Гамильтона — Кэли — Ньютона:

$$k_q L_1^{\wedge k} = q^{k-1} L_1 \sigma_{k-1}(L) - q^{k-2} L_1^2 \sigma_{k-2}(L) + \dots + (-1)^{k-1} L_1^k.$$

Здесь
$$L_1^{\wedge k} = Tr_{R(2\dots k)}\left(A^{(k)}_{1\dots k} L_{\bar 1} \dots L_{\bar k}\right) = Tr_{R(2\dots k)}\left(L_{\bar 1} \dots L_{\bar k} A^{(k)}_{1\dots k}\right)$$

Доказательство проводится совершенно аналогично случаю RTT-алгебры. При k=N играет свою роль условие ранг $A^{(N)}=1$: $A^{(N)} = u_{|1\dots N\rangle} v^{\langle 1\dots N|}$.

Это позволяет вычислить $N_q L_1^{\wedge N}$:

$$N_q L^{\wedge N} = N_q \, Tr_{R(2\dots N)} A^{(N)} L_{\bar 1}\dots L_{\bar N} =$$

$$= N_q \, Tr_{R(2\dots N)} A^{(N)} L_{\bar 1}\dots L_{\bar N} A^{(N)} = \Big\{ \text{Учтем структуру}$$

$$A^{(N)}_{1\dots N} L_{\bar 1}\dots L_{\bar N} A^{(N)}_{1\dots N} = u_{|1..N\rangle} \underbrace{\boxed{v^{\langle 1..N|} L_{\bar 1}\dots L_{\bar N} u_{|1..N\rangle}}}_{\overset{\text{Обычный след}}{Tr_{(1..N)} A^{(N)} L_{\bar 1}..L_{\bar N}}} v^{\langle 1..N|} =$$

$$= A^{(N)}_{1\dots N} \left(q^{N^2} Tr_{R(1\dots N)} A^{(N)} L_{\bar 1}\dots L_{\bar N}\right) \Big\} =$$

$$= q^{N^2} \underbrace{N_q \, Tr_{R(2\dots N)} A^{(N)}_{1\dots N}}_{\frac{q^{-N(N-1)}}{N_q} I_1} \cdot \tilde{\sigma}_N(L) = q^N \sigma_N(L) I_1$$

В результате получаем матричное тождество Гамильтона-Кэли:

$$\boxed{L^N - qL^{N-1}\sigma_1(L) + q^2L^{N-2}\sigma_2(L) + \ldots + (-1)^N q^N \sigma_N(L) = 0}$$

Здесь элементы $\sigma_i(L)$ — центральны и их можно писать с любой стороны матрицы L^{N-i}: $L^{N-i}\sigma_i = \sigma_i L^{N-i}$.

4

Структура алгебры Хопфа и теория представлений RE A $\mathcal{L}_q(R)$ и $\mathcal{L}_{q,\hbar}(R)$.

Рассмотрим __линейное__ отображение Δ из $\mathcal{L}_q(R)$ в $\mathcal{L}_q(R)\otimes\mathcal{L}_q(R)$, которое зададим сначала на генераторах $L_i{}^j$:

$\Delta(L_i{}^j) = L_i{}^k \otimes L_k{}^j$, где, как обычно, подразумевается суммирование по k.

Мы хотим продолжить это отображение на старшие мономы по генераторам $L_i{}^j$ так, чтобы Δ превратилось в гомоморфизм алгебр:

$$\Delta(L_1 L_2) = \Delta(L_1) * \Delta(L_2).$$

Оказывается, что нужно нетривиально задавать умножение в $\mathcal{L}_q(K)\otimes\mathcal{L}_q(K)$. Если задать так, как было в RTT-алгебре: $(a\otimes b)*(c\otimes d) = (a\cdot c\otimes b\cdot d)$, то гомоморфизма не получается.

Умножение $*$ в $\mathcal{L}_q(K)\otimes\mathcal{L}_q(K)$ есть композиция таких отображений:

$$* = (m_{\mathcal{L}_q}\otimes m_{\mathcal{L}_q})\circ(id\otimes R_{\mathcal{L}}\otimes id)$$

Здесь $R_{\mathcal{L}}: \mathcal{L}_q(K)\otimes\mathcal{L}_q(K)\to\mathcal{L}_q(K)\otimes\mathcal{L}_q(K)$ — билинейное отображение специального вида, к описанию которого мы и перейдём.

Бесконечномерное линейное пространство алгебры $\mathcal{L}_q(K)$ можно записать в виде прямой суммы однородных компонент:

$$\mathcal{L}_q(K) = \bigoplus_{k=0}^{\infty}\mathcal{L}_q^{(k)}(K)$$

где $\mathcal{L}_q^{(k)}(K)$ — линейная оболочка всевозможных мономов степени k:

$$\mathcal{L}_q^{(k)}(R) = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(L_1 \dots L_k)$$

В силу этого обстоятельства достаточно определить действие $R_{\mathcal{L}}$ на элементах

$$L_{i_1}^{j_1} \dots L_{i_k}^{j_k} \otimes L_{a_1}^{b_1} \dots L_{a_m}^{b_m} \in \mathcal{L}_q^{(k)} \otimes \mathcal{L}_q^{(m)}.$$

Однако в терминах таких порождающих мономов отображение $R_{\mathcal{L}}$ записывается весьма сложно.

Даже <u>линейные</u> мономы переставляются громоздкой формулой:

$$R_{\mathcal{L}}(L_1 \otimes L_2) = Tr_{(3)}(R_{13} L_1 R_{13}^{-1} \otimes L_1 R_{13} P_{12} \Psi_{31})$$

Здесь Ψ — кособратная матрица к R.

Перейдём к другой системе порождающих мономов в однородных компонентах $\mathcal{L}_q^{(k)}(R)$

$\boxed{\text{У}}\ \boxed{!}$ Линейное пространство

$\mathcal{L}_q^{(k)}(R) = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(L_1 \dots L_k)$ порождается

также мономами вида $L_{\bar{1}} \dots L_{\bar{k}}$:

$$\mathcal{L}_q^{(k)}(R) = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(L_{\bar{1}} \dots L_{\bar{k}}).$$

Более того, <u>любой</u> моном $L_1 \ldots L_k$ может быть получен линейными комбинациями мономов $L_{\bar 1} \ldots L_{\bar k}$.

<u>Доказательство:</u>

Мы не будем проводить доказательство во всей полноте, оставив это в качестве упражнения читателю. Ограничимся только разбором квадратичной компоненты. У нас есть $(n^2)^2 = n^4$ мономов $L_{i_1}^{j_1} L_{i_2}^{j_2}$ и столько же матричных элементов $\mathbb{L}_{i_1 i_2}^{j_1 j_2} \equiv (L_{\bar 1} L_{\bar 2})_{i_1 i_2}^{j_1 j_2} =$

$$= (L_1 R_{12} L_1 R_{12}^{-1})_{i_1 i_2}^{j_1 j_2}$$

По определению $\forall \mathbb{L}_{i_1 i_2}^{j_1 j_2}$ представляет собой линейную комбинацию мономов $L_{i_1}^{j_1} L_{i_2}^{j_2}$. Убедимся, что обратное <u>тоже верно.</u> Это происходит благодаря кософратимости R-матрицы.

Итак, умножим $\mathbb{L}_{12}$ <u>справа</u> на R_{12}: $\mathbb{L}_{12} R_{12} = L_1 R_{12} L_1$.

Умножим справа на Ψ_{23} и возьмём след по 2-му пространству, воспользовавшись кососбратимостью R: $Tr_{(2)} R_{12} \Psi_{23} = P_{13}$:

$$Tr_{(2)}(\mathbb{L}_{12} R_{12} \Psi_{23}) = L_1 P_{13} L_1 = L_1 L_3 P_{13}$$

Наконец, умножим справа на P_{13}:

$$L_1 L_3 = Tr_{(2)}(\mathbb{L}_{12} R_{12} \Psi_{23} P_{13})$$

$$\parallel \qquad \uparrow$$

$L_{i_1}^{j_1} L_{i_3}^{j_3}$ линейная комбинация $\mathbb{L}_{i_1 i_2}^{j_1 j_2}$

$\uparrow$

<u>все</u> квадратичные мономы.

Теперь уже ясно, что

$$\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(L_1 L_2) \equiv \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(L_{\bar{1}} L_{\bar{2}}).$$

$\boxed{\text{У}}$ $R_{\mathcal{L}}(L_{\bar{1}} \dots L_{\bar{k}} \otimes L_{\overline{k+1}} \dots L_{\overline{k+p}}) =$

$= L_{\overline{k+1}} \dots L_{\overline{k+p}} \otimes L_{\bar{1}} \dots L_{\bar{k}}$.

В частности: $R_{\mathcal{L}}(L_1 \otimes L_{\bar{2}}) = L_{\bar{2}} \otimes L_1$.

$\boxed{\text{Зам.}}$ Подробное изложение теории представлений REA с доказательствами и деталями можно посмотреть в статье Д. И. Гуревич, П. Н. Пятов, П. А. Сапонов "Теория представлений ~~~~ алгебры уравнения отражений $GL(m|n)$ типа". Алгебра и анализ, Том 20, № 2 (2008) стр. 70–133.

Теперь отображение Δ на однородных мономах вида $L_{\bar 1} \ldots L_{\bar k}$ принимает вид:

$$\boxed{\Delta(L_{\bar 1} \ldots L_{\bar k}) = L_{\bar 1} \ldots L_{\bar k} \otimes L_{\bar 1} \ldots L_{\bar k}},$$

где выполняются наши правила суммирования. Это уже будет гомоморфизм REA $\mathcal{L}_q$ в $\mathcal{L}_q(R) \otimes \mathcal{L}_q(R)$ с умножением $*$.

Рассмотрим подробнее квадратичный случай. Наше правило $\Delta(L_i{}^j) = L_i{}^k \otimes L_k{}^j$ в матричных обозначениях записывается так $\Delta(L_1) = L_1 \otimes L_1$, т. к. мы условились проводить матричное суммирование в матрицах с одинаковым индексом пространства. Теперь подействуем Δ на квадратичный моном $L_1 L_{\bar{2}} =$ $= L_1 R_1 L_1 R_1^{-1}$:

$$\Delta(L_1 L_{\bar{2}}) = \Delta(L_1) * \Delta(L_{\bar{2}}) = (L_1 \otimes L_1) * (R_1 L_1 \otimes L_1 R_1^{-1}) =$$

$$= (L_1 \otimes L_1) * (R_1 L_1 R_1^{-1} \otimes R_1 L_1 R_1^{-1}) = (L_1 \otimes L_1) * (L_{\bar{2}} \otimes L_{\bar{2}})$$

$$R_1^{-1} R = \mathbb{1}$$

Мы видим, что в произведении $*$ появились рядом L_1 и $L_{\bar{2}}$ которые надо переставить с помощью R_ρ, а в этих образующих оно действует просто как обычная перестановка $R_\rho(L_1 \otimes L_{\bar{2}}) = L_{\bar{2}} \otimes L_1$ =>

$$\boxed{\Delta(L_1 L_{\bar{2}}) = L_1 \underbrace{L_{\bar{2}} \otimes L_1}_{R_\rho(L_1 \otimes L_{\bar{2}})} L_{\bar{2}}}$$

Подействуем теперь на перестановочные соотношения REA в виде

$$R_{12} L_1 L_{\bar{2}} - L_1 L_{\bar{2}} R_{12} \doteq 0$$

Δ будет задавать гомоморфизм из $\mathcal{L}_q(R)$ в $\mathcal{L}_q(R) \otimes \mathcal{L}_q(R)$ со $*$, если образ этого равенства при отображении Δ перейдёт в 0 в алгебре $\mathcal{L}_q(R) \otimes \mathcal{L}_q(R)$:

$$\Delta(R_{12} L_1 L_{\bar 2}) = \underbrace{R_{12} L_1 L_{\bar 2}}_{\substack{\text{пользуемся} \\ \text{соотношениями в RЕА}}} \otimes L_1 L_{\bar 2} = L_1 L_{\bar 2} R_{12} \otimes L_1 L_{\bar 2} =$$

$$= L_1 L_{\bar 2} \otimes \underbrace{R_{12} L_1 L_{\bar 2}}_{\substack{\text{пользуемся} \\ \text{соотношениями в RЕА}}} = L_1 L_{\bar 2} \otimes L_1 L_{\bar 2} R_{12} = \Delta(L_1 L_{\bar 2} R_{12})$$

Ко-ассоциативность Δ легко следует из свойств R_α:

$$(\Delta \otimes id) \circ \Delta(L_{\bar 1} \ldots L_{\bar k}) = (\Delta \otimes id)(L_{\bar 1} \ldots L_{\bar k} \otimes L_{\bar 1} \ldots L_{\bar k}) =$$

$$= L_{\bar 1} \ldots L_{\bar k} \otimes L_{\bar 1} \ldots L_{\bar k} \otimes L_{\bar 1} \ldots L_{\bar k} \equiv$$

$$\equiv (id \otimes \Delta) \circ \Delta(L_1 \ldots L_{\bar k}).$$

$\boxed{\text{V}}$ Отображение $\varepsilon : \mathcal{L}_q(R) \to \mathbb{C}$ вида

$$\varepsilon(L_i^{\,j}) = \delta_i^{\,j}, \quad \varepsilon(a \cdot b) = \varepsilon(a)\varepsilon(b)$$

является ко-единицей для коумножения Δ.

Проверьте соблюдение аксиом самостоятельно $m_\alpha \circ (id \otimes \varepsilon) \circ \Delta = m_\alpha \circ (\varepsilon \otimes id) \circ \Delta = id_\alpha$.

Рассмотрим кратко теорию конечномерных представлений REA. Здесь удобнее работать с модифицированной REA $\mathcal{L}_{q,\hbar}(K)$:

$$R_{12}K_1R_{12}K_1 - K_1R_{12}K_1R_{12} = \hbar(R_{12}K_1 - K_1R_{12})$$

Перенормировкой генераторов $K \mapsto \hbar\hat{K}$ перейдём к соотношениям, где $\hbar = 1$.

$$R_{12}\hat{K}_1\hat{K}_{12}\hat{K}_1 - \hat{K}_1R_{12}\hat{K}_1R_{12} = R_{12}\hat{K}_1 - \hat{K}_1R_{12}$$

$\boxed{\text{Y}}$ Рассмотрим N-мерное векторное пространство V и выберем в нём некоторый базис $\{e_i\}_{1\le i\le N}$.

Сопоставим генераторам $\hat{k}_i^{\,j}$ линейные операторы $\rho_V(\hat{k}_i^{\,j}) \in \mathrm{End}(V)$, задав их действие на базисных векторах правилом:

$$\rho_V(k_i^{\,j}) \triangleright e_k = e_i C_k^{\,j}$$

Здесь $C_i^{\,j} = \sum_a \Psi_{a\,i}^{\,a\,j}$.

Тогда ρ_V задаёт неприводимое представление $\mathcal{L}_{q,1}(K)$ в V.

Ключевым моментом в дока- =64=
зательстве служит свойство матрицы
C: $\quad Tr_{(1)} C_1 R_{12} = \mathbb{I}_2 \Leftrightarrow \sum_{ab} C_a{}^b R_b{}^a{}_i{}^j = \delta_i{}^j$.
Доказательство утверждения оставляем в качестве упражнения.

Следующий вопрос, как строить представления в $V^{\otimes k}$, в V^* и т.п.
Здесь мы воспользуемся коумножением Δ, но, как и в случае супералгебр, при построении действия $\Delta(\hat{L}_1) = \hat{L}_1 \otimes \hat{L}_1$ на вектор $e_i \otimes e_j \in V \otimes V$ нужно учитывать перестановку второй "ножки" L_1 с первым вектором e_i, то есть

$$\rho_V(\hat{L}_i{}^k) \otimes \rho_V(\hat{L}_k{}^j) \triangleright e_a \otimes e_b \neq^{!}$$
$$\left(\rho_V(\hat{L}_i{}^k) \triangleright e_a\right) \otimes \left(\rho_V(\hat{L}_k{}^j) \triangleright e_b\right)$$

Необходимо переставить L_k^j и e_a аналогом отображения R_ρ; а именно, Зададим $R_{\mathcal{L}_q,V} : \mathcal{L}_q(R) \otimes V \to V \otimes \mathcal{L}_q(R)$

правилом:

$$R_{\mathcal{L}_q,V}\left(R_{12}^{-1}\hat{L}_1 R_{12} \otimes e_1\right) = e_1 \otimes \hat{L}_2$$

В компонентах:

$$\sum_{\substack{\{a\} \\ \{b\} \\ \{c\}}} R_{\mathcal{L}_q,V}\left((R^{-1})_{i_1 i_2}^{a_1 a_2} \hat{L}_{a_1}^{b_1} R_{b_1 a_2}^{c_1 j_2} \otimes e_{c_1}\right) = e_{i_1} \otimes \hat{L}_{i_2}^{j_2}$$

Это отображение следует применять для перестановки L и V при построении представления в $V \otimes V$. ~~это~~ Представление $\rho_{V\otimes V}$ в $V \otimes V$ есть отображение $\mathcal{L}_q(R) \otimes V^{\otimes 2} \to V^{\otimes 2}$ такое, что $a \in \mathcal{L}_q(R) \mapsto End(V^{\otimes 2})$ и это отображение – гомоморфизм.

$$\rho_{V\otimes V} : a \otimes v \otimes u \xrightarrow{\Delta \otimes id} \underbrace{a_{(1)} \otimes a_{(2)}}_{\Delta(a)} \otimes v \otimes u \longrightarrow$$

Элемент $\mathcal{L}_q(R)$ вектора V

$$\longrightarrow a_{(1)} \otimes \underbrace{\tilde{v} \otimes \tilde{a}_{(2)}}_{R_{\mathcal{L}_q,V}(a_{(2)} \otimes v)} \otimes u \to (\rho_V(a_{(1)}) \triangleright \tilde{v}) \otimes (\rho_V(\tilde{a}_{(2)}) \triangleright u).$$