Лекция 7.

- Здесь мы обсудим на примере классической одномерной тэта-функции $\Theta(\tau, z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e\left(\frac{\tau}{2} n^2 + nz\right)$ модулярное поведение тэта-функций, т.е. поинтересуемся, что происходит при замене переменных $(\tau, z) \longmapsto \left(-\frac{1}{\tau}, \frac{z}{\tau}\right)$.

- Поможет нам формула суммирования Пуассона, которая уже раз обсуждалось. Но было это давно, а потому...

- <u>Формула суммирования</u> <u>Пуассона для алгебраистов</u>.

Пусть $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ – любая быстро убывающая на $\pm\infty$ функция, обладающая абсолютно сходящимся рядом

$$g(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x+k)$$

Рассмотрим преобразование Фурье $\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e(-xy) dx$ функции f. Тогда, как доказал Пуассон (?)

Теорема. $\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x+k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e(kx) \quad (*)$

Полагая в ~~этой~~ формуле $(*)$ $x = 0$, получим полезную формулу суммирования:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k) \qquad (**)$$

(соблюдая минимальные приличия, скажу, что это верно, если f и $\hat{f}$ быстро убывают на $\pm\infty$)

Вот пример. Возьмем $q(x) = e^{-\pi x^2}$. Тогда, как известно, $\hat{q}(x) = q(x)$.

Задача 7.1. Для $f(x) = e^{-\pi x^2 v}$, $v > 0$, $\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{v}} e^{-\frac{\pi}{v} y^2}$.

Доказать.

Для этой Фурье-пары теорема Пуассона дает:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi(x+n)^2 v} = v^{-1/2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\frac{-\pi n^2}{v}} e(nx), \quad x\in\mathbb{R}$$

Отсюда, применяя принцип аналитического продолжения (по x), получаем

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi(z+n)^2 v} = v^{-1/2} \sum e^{\frac{-\pi n^2}{v}} e(nz), \quad z\in\mathbb{C}.$$

Перепишем это равенство еще раз

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{+\pi i (z+n)^2 \{iv\}} = \left(\frac{iv}{i}\right)^{-1/2} \sum e^{\frac{-\pi i n^2}{iv}} e(nz), \quad iv\in H_+,$$

$z\in\mathbb{C}$, чтобы, после аналитического продолжения с оси $OY = \{iv,\ v>0\} \subset H_+$, окончательно получить

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{+i\pi(z+n)^2\tau} = \left(\frac{\tau}{i}\right)^{-1/2} \sum e^{\pi i n^2(-1/\tau)} e(nz) \qquad (\perp)$$

Подстановка в $(\perp)$ $z \to z/\tau$, дает желанное модулярное поведение, впервые обнаруженное одним из братьев Якоби:

$$\Theta\left(-1/\tau, \frac{z}{\tau}\right) = \sqrt{\frac{\tau}{i}}\; e\left(-\frac{z^2}{\tau}\right)\Theta(\tau, z) \quad \text{(проверьте!)} \qquad (\mathrm{I})$$

- <u>О бережном отношении к мелочам.</u>

В формуле (I) положим $z=0$. Получим голоморфную функцию на верхней полуплоскости H_+, которая называется тэта-константой. Иной раз в результате получается тождественный по τ нуль, но в нашем случае $\Theta(\tau,0) \not\equiv 0$ (почему?). Теперь заметим, что

$$\Theta^2(\tau+1;0) = \Theta^2(\tau;0), \quad \text{а} \quad \Theta^2(-1/\tau;0) = \frac{\tau}{i}\Theta^2(\tau;0)$$

Определение. ~~Задача~~ Голоморфная на верхней полуплоскости (вплоть до точки $i\infty$) функция $f(\tau)$ называется модулярной формой веса k, если

$$f(\tau+1) = f(\tau) \text{ и } f(-1/\tau) = \tau^k f(\tau).$$

- Если бы не „мелочь" в виде множителя $(-i)$, то функцию $\Theta^2(\tau;0)$ можно было бы считать модулярной формой веса 1.

Но с этим множителем нужно считаться! В итоге получаем, что лишь $\Theta^8(\tau;0)$ – это модулярная форма веса 4.

- Про модулярные формы известно больше, чем нужно. В частности, не существует ненулевых модулярных форм веса <4, а пространство модулярных форм веса 4 одномерно и порождено рядом Эйзенштейна $E_4(\tau)=\sum\limits_{\mathbb{Z}^2-\{0,0\}}\frac{1}{(m\tau+n)^4}$ (см., например, Ж.-П. Серр „Курс арифметики")

Задача 7.2. Доказать, что $E_4(\tau)$ является ненулевой модулярной формой веса 4. Вычислить $\lim\limits_{\tau\to i\infty}E_4(\tau)$.

- Как следствие получаем, что

$$\Theta^8(\tau,0)=(\text{const})\,E_4(\tau)$$

Задача 7.3 Вычислить (const).

- На прощание я покажу многомерный аналог этой истории.

Для простоты рассмотрим вещественное векторное пространство V, снабженное скалярным произведением $(\ ,\ )$ (сигнатура квадратичной формы $(x,x)=x^2$ равна $(0,n)$, т.е. $x^2>0$ для любого $x\neq 0$). Пусть L – решетка в V, на которой скалярное произведение принимает целые значения, а $l^2 \in 2\mathbb{Z}$, для любого вектора $l \in L$. Кроме того, мы предположим, что решетка L унимодулярна, т.е. совпадает со своей двойственной решеткой $L^\vee$.

Задача 7.4. Такие решетки существуют только в размерностях, кратных 8. (не пытайтесь самостоятельно решать эту задачу)

Тогда тэта-константа $\Theta_L(\tau) = \sum_{l \in L} e\left(\frac{\tau}{2} l^2\right) = \sum_{l \in L} e^{\pi i \tau l^2}$

является модулярной формой веса $\frac{\dim V}{2}$.

- В размерности 8 существует единственная с точностью до изометрии четная, унимодулярная решетка E_8.

Получается, что $\Theta_{E_8}(\tau) = (\mathrm{const})\, E_4(\tau)$

Задача 7.5. А чему равна эта константа?

До свидания и удачи!