Лекция 6.

Размерность пространства $\Theta(Q,0,0)$ тэта-функций с тэта-фактором автоморфности, который определяется тройкой $(Q,0,0)$.

- Рассмотрим квазиэрмитову форму Q, мнимая часть которой $A=\frac{1}{2i}\left(Q(z,w)-Q(w,z)\right)$ является кососимметрической формой, целочисленной на $L\times L$. Предполагается, что A – невырожденная кососимметрическая форма, а $H>0$.

- Лемма о симплектическом базисе решетки (см., например, Э. Б. Винберг Курс алгебры).

Лемма. Решетка L допускает такой базис $(e_1,\dots,e_n,f_1,\dots,f_n)$, что

а) $A(e_i,e_j)=A(f_i,f_j)=0$; $i,j=1,\dots,n$

б) $A(e_i,f_i)=d_i$, $i=1,\dots,n$, причем $d_1\,|\,d_2\,|\,d_3\dots|\,d_n$

(набор чисел $(d_1,\dots,d_n)$, в котором каждое следующее натуральное число d_i делится на предыдущее d_{i-1}, называется набором инвариантных множителей (иной раз, делителей) решетки L относительно целочисленной на L кососимметрической формы)

- Произведение $Pf(L)=\prod_{i=1}^{n} d_i$ называется пфаффианом (определителем Пфаффа) формы A

на решетке L.

Задача 6.1. Пусть $L^\vee$ — решетка, двойственная решетке L относительно формы A. Докажите, что

$$Pf(L) = \sqrt{[L^\vee : L]}$$

• Вот главный результат этой лекции.

Теорема. $\dim_{\mathbb{C}} \Theta(Q,0,0) = Pf(L)$.

Для доказательства изучим свойства квазиэрмитовой формы Q. С этой целью выберем в комплексном векторном пространстве V базис $\{f_i/d_i\}$, где векторы f_i и натуральные числа d_i взяты из леммы.

Теперь давайте вспомним, что $Q = H + S$, где H — это эрмитова, а S — симметрическая форма, а $\operatorname{Im} H = \operatorname{Im} Q = A$.

Но кососимметрическая форма A равна 0 на вещественном подпространстве $\mathcal{L} = \mathbb{R}\cdot(f_1/d_1) + \dots + \mathbb{R}(f_n/d_n)$ (= лагранжевом подпространстве формы A). Следовательно, в $\mathbb{C}$-базисе $\{f_i/d_i\}$ пространства V эрмитова форма H записывается вещественной матрицей h, $h^t = h$. Итак, в нашем базисе

$$H(z,w) = z^t h \bar{w}$$ (вектор-столбцы координат)

Рассмотрим симметрическую на V форму $S_0(z,w) = z^t h w$.

Умножив любую тэта-функцию из пространства $\Theta(Q,0,0)$

на тривиальную тэта-функцию $e\left(\overset{\pi/4i}{-}S(z)-S_0(z)\right)$, можно считать, что с самого начала мы рассматриваем фактор автоморфности типа $(Q,0,0)$ с квазиэрмитовой формой Q, которая обладает следующим свойством $(\boxtimes)$:

$$Q(z,w)=0, \text{ если } w\in\mathcal{L},\ z\in V \text{ (почему?)}$$

<u>Замечание</u>. Это утверждение понятно (?), если w и $z\in\mathcal{L}$. Но z берется из V, и обнуление Q уже нуждается в объяснении.

Начиная с этого места, мы принимаем условие $(\boxtimes)$.

- Оно помогает понять устройство формы Q.

<u>Вычисление $Q(z,w)$, $z,w\in V$.</u>

Имеем (в выбранном базисе $\{f_i/d_i\}$),

$$Q(z,w)=Q\left(\sum_{i=1}^{n} z_i\left(f_i/d_i\right),w\right)=\sum_{i=1}^{n} Q(f_i,w)\,z_i/d_i=$$

$$=2i\sum_{i=1}^{n} A(f_i,w)\,z_i/d_i \quad (\circledast)$$

Заметим, что $L\cap\mathcal{L}=\mathbb{Z}f_1+\ldots\mathbb{Z}f_n$, и что базисный вектор f_i подрешетки $L\cap\mathcal{L}$ имеет координаты $\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ d_i\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$, т.е. решетка $L\cap\mathcal{L}$ — это все векторы вида $\begin{pmatrix}\mathbb{Z}d_1\\ \vdots\\ \mathbb{Z}d_n\end{pmatrix}$.

• Теперь из формулы (⊗) сразу следует, что

$$Q(z, f_i) \neq 0 \,, \quad Q(f_i, f_i) = 0 \,.$$

Это означает, что любая тэта-функция из нашего пространства, инвариантна при сдвигах на все векторы вида $\begin{pmatrix} d_1\mathbb{Z} \\ \vdots \\ d_i\mathbb{Z} \\ \vdots \\ d_n\mathbb{Z} \end{pmatrix}$ (почему?).

• Чтобы понять, что делают оставшиеся базисные векторы e_i решетки L, введем матрицу периодов $\Omega = (\omega_{ij})$:

$$e_i = \sum \omega_{ij} \left(\frac{f_j}{d_j} \right)$$

Имеем,
$$Q\left(z, \sum_{j=1}^{n} p_j e_j\right) = 2i \sum_{i=1, j=1}^{n} p_j z_i / d_i \, A(f_i, e_j) =$$
$$= -2i \sum p_i z_i = -2i\, z^t p \,, \quad p = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}, \; p_i \in \mathbb{Z};$$

и
$$Q\left(\sum p_j e_j, \sum p_i e_i\right) = \sum_{i,j} Q(e_j, e_i) p_i p_j = \sum_{i,j} -2i\, p_j \omega_{ji} p_i$$

$$\left(\text{т. к. } Q(e_j, e_i) = Q\left(\sum_k \omega_{jk} \frac{f_k}{d_k}, e_i\right) = -2i\, \omega_{ji} \right)$$

Поэтому, значение фактора автоморфности

$$\Theta\left(z, \sum p_i e_i\right) = e\left(\frac{1}{2i} Q\left(z, \sum p_i e_i\right) + \frac{1}{4i} Q\left(\sum p_j e_j, \sum p_i e_i\right) \right) =$$
$$= e\left(-z^t p - \frac{1}{2} p^t \Omega p \right)$$ (через минуту я покажу, что матрица периодов симметрична!)

Нельзя не отметить поразительное сходство происходящего с тем, что мы видели в одномерном случае. Это не просто сходство, а прямое обобщение, если только уяснить, что матрица периодов Ω есть правильная замена числа τ, взятого с верхней полуплоскости.

• <u>Матрица периодов Ω живет на верхней „полуплоскости" Зигеля рода n.</u>

Докажем, что $\Omega = (\omega_{ij})$ обладает двумя свойствами:

1) $\Omega^t = \Omega$

2) $\operatorname{Im} \Omega > 0$

В самом деле, $Q(z,w) = H(z,w) - S_0(z,w) = z^t h(\overline{w} - w) = (-2i) z^t h \operatorname{Im} w$. Следовательно, $\operatorname{Re} Q(z,w) = 2(\operatorname{Im} z)^t h (\operatorname{Im} w)$.

Так как h — это вещественная симметрическая, положительно определенная матрица, то $\operatorname{Re}(Q(z,z)) > 0$, если $\operatorname{Im} z \neq 0$. Но, как уже было отмечено, $\operatorname{Im} \Omega = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(Q(e_i, e_j) \right)_{ij}$.

Задача 6.2. Докажите, что $h = (\operatorname{Im} \Omega)^{-1}$.

• Комплексные симметрические $n \times n$ матрицы $Z_n = X_n + iY_n$, $Y_n > 0$, являются правильным аналогом верхней полуплоскости $H_+ = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0 \}$ и называется верхней полуплоскостью Зигеля рода n.

Советую вернуться к рассказу Николая Петровича и понять, что еще одно обещание я выполнил.

• Но вернемся к вычислению размерности. Все будет развиваться по одномерному сценарию. Напомню главные моменты:

1. Инвариантность тэта-функции при сдвигах на векторы из решетки $\mathbb{Z}d_1 + \dots \mathbb{Z}d_n$ позволяет разложить функцию в ряд Фурье:

$$\Theta(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z}/d_1 + \dots + \mathbb{Z}/d_n} a(r)\, e\left(z^t r\right)$$

Кроме того, для любого целочисленного вектора $p \in \mathbb{Z}^n$

$$\Theta(z+p) = \Theta(z)\, e\left(-z^t p - \frac{1}{2} p^t \Omega p\right)$$

• Как и в одномерном случае, из единственности разложения в ряд Фурье следует, что

$$c(r)\, e\left(p^t \Omega r\right) = c(r+p)\, e\left(-\frac{1}{2} p^t \Omega p\right)$$ для

любого вектора $r \in \mathbb{Z}/d_1 + \dots + \mathbb{Z}/d_n$ и $p \in \mathbb{Z}^n$.

• Поэтому, если положить

$$\Theta_r = \sum_{p \in \mathbb{Z}^n} e\left(\frac{1}{2}(p+r)^t \Omega (p+r) + z^t (p+r)\right) \quad (***),$$

то $\Theta(z) = \sum_{r} \text{const}\; \Theta_r(z)$, где r пробегает полную систему представителей $\mathbb{Z}/d_1 + \dots + \mathbb{Z}/d_n \big/ \mathbb{Z} + \dots + \mathbb{Z}$

в количестве $d_1 \cdot \ldots \cdot d_n = Pf(L)$ штук (константа $\underbrace{\text{const}}_{\text{в разложении } Y}$ зависит от Ω, но не от z)

Задача 6.3. Докажите, что ряд $(***)$ абсолютно сходится в $\mathbb{C}^n$ и определяет голоморфную (целую) функцию.

Задача 6.4. Докажите, что Θ_r действительно лежит в нашем пространстве $\Theta(Q, 0, 0)$.

- Линейная независимость функций Θ_r следует из единственности разложения в ряд Фурье (почему?). Теорема доказана.