

Запоминашки Цика 4. (все задачи этого цикла трудное.

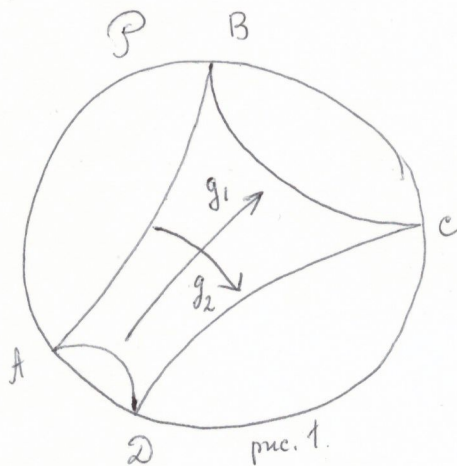
Задачи 1-2.

Не пытайтесь их решать самостоятельно. Почитайте книжечку В.В. Прасолова "Геометрия Лобачевского" или поговорите с опытными коллегами.)

1. Можно ли замостить плоскость Лобачевского выпуклой четырехугольной плиткой с суммой углов а)  $\pi$  б)  $\pi/4$  в)  $\pi/\sqrt{2}$ ?

Задачи 3-4. (гиперболический тор с проколом)

Рассмотрим выпуклый идеальный четырехугольник  $P: ABCD$  (см. рисунок 1) и отождествим его стороны так, как



показано стрелками на рисунке с помощью движений

$$g_1: AD \rightarrow BC \quad \text{и} \quad g_2: AB \rightarrow CD$$

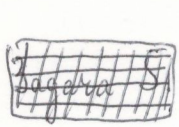
$$g_1(A) = B \quad g_2(B) = C$$

3. Первый вопрос: почему такие движения существуют?

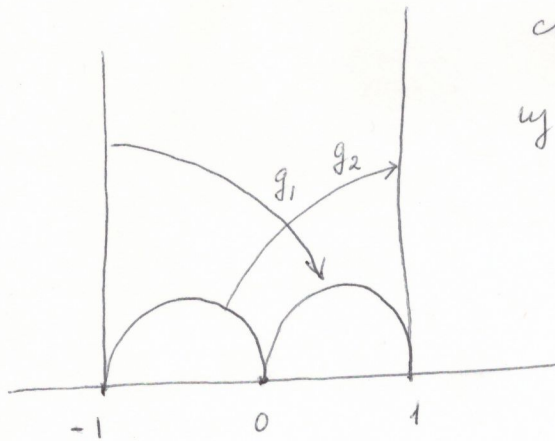
Второй вопрос: насколько их выбор однозначен?

Третий вопрос: верно ли, что группа  $\Gamma = \langle g_1, g_2 \rangle$ , порожденная элементами  $g_1$  и  $g_2$  (лежащими в группе  $\text{Isom}^+ \mathbb{H}^2$ ), является свободной подгруппой с двумя образующими?

4. а) Доказать, что группа  $\Gamma$  тогда и только тогда является дискретной группой движений плоскости Лобачевского, когда коммутатор  $(g_1, g_2) = g_2^{-1} g_1^{-1} g_2 g_1$  — это параболический элемент.



б) На рисунке 2 вы видите идеальный четырехугольник  $P$  вместе с схемой отождествления его сторон с помощью сохраняющих ориентацию движений из группы  $\mathbb{P}SL(2, \mathbb{R}) (\cong \text{Isom}^+ \mathbb{H}^2)$



Проверьте, что в этом случае  $g_1$  и  $g_2$  могут быть представлены матрицами из группы  $SL(2, \mathbb{Z})$ . Найдите явный вид этих матриц. Однозначен ли их выбор?

Последняя ваша задача:

- Готовьтесь, пожалуйста, к экзамену 28 мая в 17<sup>00</sup> (по Москве).  
3 задачи на сокеты 4 зимов, но, разумеется, много проще.

FAQ. 1) Почему на контрольной были такие трудные задачи?

Ответ: для тех, кто ничего не хочет знать, они (задачи), всегда

будут трудными.

2) Как пережить экзамен?

Ответ: в июне на летней сессии. Можно улучшить свое положение, продолжая до зимы решать задачи.